

Fattorizzazione LU per matrici speciali

luisa d'amore
a.a. 2003-2004

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Quando una matrice si dice **simmetrica** ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Esempio: Applichiamo l'algoritmo di Gauss
senza pivoting alla matrice **simmetrica**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Passo 1: moltiplicatori

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -13/2 & 3/2 \\ 1/2 & -13/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

simmetrica!

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Passo 2: moltiplicatori $m_{3,2}=1, m_{4,2}=1$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -13/2 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 7/2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

simmetrica!

Passo 3: moltiplicatori

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -7 & 1 \\ 22/7 \end{pmatrix} \rightarrow A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -7 & 1 \\ 22/7 \end{pmatrix}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Nell'esempio

matrice iniziale simmetrica



le sottomatrici attive sono tutte simmetriche

E' vero in generale?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Teorema: Se A è simmetrica, applicando l'algoritmo di Gauss senza pivoting, si ha:

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{j,i}^{(k)}, \quad k < i, j \leq n, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Dim. Per induzione su k

$k=0$: vero per ipotesi (A è simmetrica)

$k > 0$: supponiamo vero per $k-1$

$$\begin{aligned} a_{i,j}^{(k)} &= a_{i,j}^{(k-1)} - m_{i,k} a_{k,j}^{(k-1)} = \\ &= a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} a_{k,j}^{(k-1)} = \\ &= a_{j,i}^{(k-1)} - \frac{a_{j,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} a_{k,i}^{(k-1)} = a_{j,i}^{(k)} \end{aligned}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

cvd

In che modo

sfruttare la simmetria di A

nella fattorizzazione $A=LU$

?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Esempio: Primo passo della fattorizzazione $A=LU$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 13/2 & 3/2 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 7/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Se si effettuano i calcoli solo sul triangolo superiore...



...la complessità di tempo è circa dimezzata !

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Problema :
la fattorizzazione LU senza pivoting
è instabile

Cosa succede se
si utilizza il pivoting parziale ?

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

Esempio: Primo passo

Pivoting:
scambio riga 1 e 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

simmetrica non è simmetrica !

si perde la simmetria !

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

Quindi, in generale,
l'utilizzo di una tecnica di pivoting
nell'algoritmo di Gauss
NON CONSENTE di sfruttare ,
in termini di efficienza computazionale
la simmetria della matrice

In quali condizioni si può
evitare il pivoting
?

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Passo 1: Pivot=4=a₁₁

NON è necessario effettuare scambi di righe!

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

Passo 2: pivot = $15/4 = a_{22}^{(1)}$

NON è necessario effettuare scambi di righe:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 56/15 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Passo 3: pivot = $56/15 = a_{33}^{(2)}$

NON è necessario effettuare scambi di righe:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 56/15 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 209/56 \end{pmatrix}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Ad ogni passo k , l'elemento massimo (in modulo) della colonna k , si trova già sulla diagonale



Il pivoting parziale,
in questo caso è INUTILE!

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Per quale classe di matrici simmetriche si riesce a garantire che, ad ogni passo, il pivot si trovi già sulla diagonale

?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Nell'esempio ...

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 4 = |-4| = |a_{11}| > |-1| + 0 + 0 = 1$$

A è a diagonale dominante $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 15/4 = a_{22}^{(1)} > |-1| + 0 + 0 = 1$$

$A^{(1)}$ è a diagonale dominante $|a_{ii}^{(1)}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}^{(1)}|$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Nell'esempio ...

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 15/4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 56/15 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow 56/15 = a_{33}^{(2)} > |-1| = 1$$

$A^{(2)}$ è a diagonale dominante $|a_{ii}^{(2)}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}^{(2)}|$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Quindi ...

A è a diagonale dominante $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$



Al generico passo k
Le sottomatrici attive sono
 A diagonale dominante

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Inoltre ...

A simmetrica e a diagonale dominante



Al passo k ,
Il massimo della riga
coincide con il massimo della colonna
e si trova sulla diagonale

$$\max_i |a_{i,j}^{(k-1)}| = \max_j |a_{i,j}^{(k-1)}| = |a_{k,k}^{(k-1)}|$$

simmetria dominanza diagonale

Cholesky

Il pivoting parziale è INUTILE !

Come si specializza
la fattorizzazione $A = LU$
di una
matrice simmetrica ?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Considerati i fattori LU della matrice A:

$$U = A^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ & & -7 & 1 \\ & & & 22/7 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1/2 & 1 & & \\ 3/2 & 1 & 1 & \\ 1/2 & 1 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonale di U

se $D = \text{diag}(2, 1/2, -7, 22/7) \Rightarrow D^{-1} = \text{diag}(1/2, 2, -1/7, 7/22)$

$$D^{-1}U = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1/7 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = L^T \Rightarrow U = DL^T$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Quindi, $A = LU$

Poiché $U = DL^T$

$A = LDL^T$

Matrice triangolare
inferiore
(moltiplicatori)

Matrice diagonale
(elementi diagonali di U)

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Quindi, se A è una **matrice simmetrica**
la fattorizzazione $A=LU$ (senza pivoting)
si specializza in
 $A=LDL^T$

E' sempre vero ?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Teorema:

Sia A una matrice simmetrica, tale che tutte le sue
sottomatrici principali sono non singolari.
Esiste allora **un'unica matrice L triangolare inferiore**,
con elementi diagonali uguali a 1, ed **un'unica matrice D**
diagonale, tali che:

$$A = LDL^T$$

Inoltre, **L coincide con la matrice della fattorizzazione**
LU di A, e **gli elementi di D sono gli elementi diagonali di U**.
Se A è a diagonale dominante, infine, tale fattorizzazione
è stabile.

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Dimostrazione:

Per ipotesi, $A=LU$. Poniamo:

$$D = \text{diag}(u_{11}, u_{22}, \dots, u_{nn})$$

Introdotta la matrice M tale che:

$$M^T = D^{-1} U \quad (\text{triangolare superiore con elementi diagonali uguali a 1})$$

$$A = LU = LD(D^{-1} U) = LDM^T$$

dimostriamo che

$$M=L$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

$$A = LDM^T,$$

moltiplicando a sinistra ambo i membri a sinistra per M^{-1} e a destra per $(M^T)^{-1}$:

$$\underbrace{M^{-1} A (M^T)^{-1}}_{\text{simmetrica}} = \underbrace{M^{-1} L D}_{\text{triangolare inferiore}}$$

Triangolare inferiore + diagonale
simmetrica

$$M^{-1} L D : \text{diagonale}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

$$M^{-1} L D : \text{diagonale} \rightarrow M^{-1} L : \text{diagonale}$$

Poiché sia M^{-1} sia L hanno elementi diagonali uguali a 1

$$M^{-1} L = I \rightarrow M = L$$

cvd

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Esistono altre condizioni sotto le quali per una matrice simmetrica è possibile evitare il pivoting nella fattorizzazione LU ?

Matrici simmetriche e definite positive

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Cosa significa che una matrice è definita positiva ?

A simmetrica.

A definita positiva



$$x^T A x > 0, x \neq 0$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Come si può verificare se una matrice è definita positiva ?

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -18 \\ 4 & 30 & 4 \\ -18 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A_1 \\ \text{Det}(A_1) = 16 > 0$$

$$A_2 \\ \text{Det}(A_2) = 464 > 0$$

$$A_3 \\ \text{Det}(A_3) = 584 > 0$$

Cholesky

$$\text{Det}(A_k) > 0$$



A: Simmetrica e Definita positiva

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Criterio di Sylvester

A simmetrica.

A definita positiva



$$\begin{aligned} \det(A_k) &> 0 \\ A_k &= (a_{ij}), i=1, k \\ &\quad j=1, k \end{aligned}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Come si specializza la fattorizzazione LDL^T di una matrice simmetrica e definita positiva?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Teorema :

Sia A simmetrica e definita positiva. Allora
Esiste un'unica matrice L triangolare inferiore
Tale che:

$$A = L L^T$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Dimostrazione:

Se A è simmetrica e definita positiva allora
(per il criterio di Sylvester) tutte le sottomatrici attive
sono non singolari



Esiste la fattorizzazione $A = L D L^T$

Consideriamo la matrice $D^{1/2} = (\sqrt{d_{11}}, \sqrt{d_{22}}, \dots, \sqrt{d_{nn}})$

Ponendo:

$$L' = L D^{1/2}$$



$$A = L D L^T = \underbrace{(L D^{1/2})}_{L'} \underbrace{(D^{-1/2} L^T)}_{(L D^{1/2})^T L'^T} = L' (L')^T$$

cvd

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Dimostrazione:

Si procede per induzione.

Per $n=1$, è vero perché basta porre

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

Supponiamo vera la tesi per $n=k-1$, cioè:

$$A_{k-1} = L_{k-1} L_{k-1}^T$$

Consideriamo la matrice:

$$A_k = \left\{ \begin{array}{cc} A_{k-1} & y \\ y^T & a_{kk} \end{array} \right\}$$

Vettore colonna di
k-1 componenti

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Poniamo:

$$L_k = \left[\begin{array}{cc} L_{k-1} & 0 \\ w & l_{kk} \end{array} \right]$$

Vettore riga di
k-1 componenti

Imponendo che:

$$A_k = L_k L_k^T$$

Si ha:

$$A_k = L_{k-1} L_{k-1}^T$$

$$y = L_{k-1} w$$



Si ricava w

$$y^T = w^T L_{k-1}^T$$

$$a_{kk} = w^T w + l_{kk}^2$$



$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - w^T w}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Dimostriamo che l'argomento della radice quadrata è positivo, cioè:

$$a_{kk} - w^T w > 0$$

Consideriamo i vettori: $z = A_{k-1}^{-1} y$ $x = (z, -1)$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} x^T A_k x &= z^T A_{k-1} z - 2z^T y + a_{kk} = z^T y - 2z^T y + a_{kk} = \\ &= -z^T y + a_{kk} = a_{kk} - y^T A_{k-1}^{-1} y = \\ &= a_{kk} - y^T (L_{k-1}^T L_{k-1})^{-1} y = a_{kk} - (L_{k-1}^{-1} y)^T (L_{k-1}^{-1} y) = \\ &= a_{kk} - w^T w \end{aligned}$$

Per ipotesi, A è definita positiva cioè:

$$x^T A_k x > 0 \Rightarrow a_{kk} - w^T w > 0 \quad \text{c.v.d.}$$

Cholesky A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Come si costruisce la matrice L della fattorizzazione $A = LL^T$

?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & 4 \\ -8 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

Simmetrica e Definita positiva

Vogliamo determinare la matrice L (triang. inf.) tale che:

$$A = L L^T$$

$$\begin{pmatrix} 16 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & 4 \\ -8 & 4 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2 + l_{22}^2 & l_{31}l_{21} + l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{31}l_{21} + l_{22}l_{32} & l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{pmatrix}$$

Uguagliando gli elementi omologhi ...

Cholesky A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Dell'uguaglianza degli elementi omologhi si ottiene L :

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -8 \\ 4 & 10 & 4 \\ -8 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$16 = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{16} = 4$$

$$4 = l_{11}l_{21} \Rightarrow l_{21} = 4/l_{11} = 1$$

$$-8 = l_{11}l_{31} \Rightarrow l_{31} = -8/l_{11} = -2$$

$$10 = l_{21}^2 + l_{22}^2 \Rightarrow l_{22} = \sqrt{10 - l_{21}^2} = 3$$

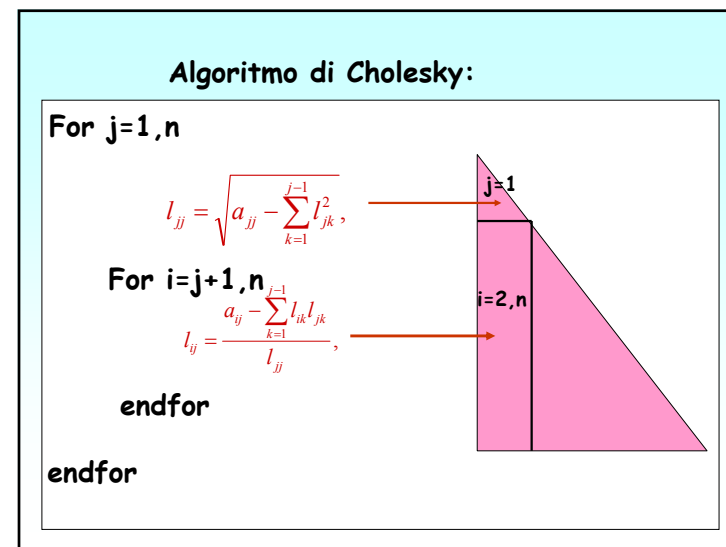
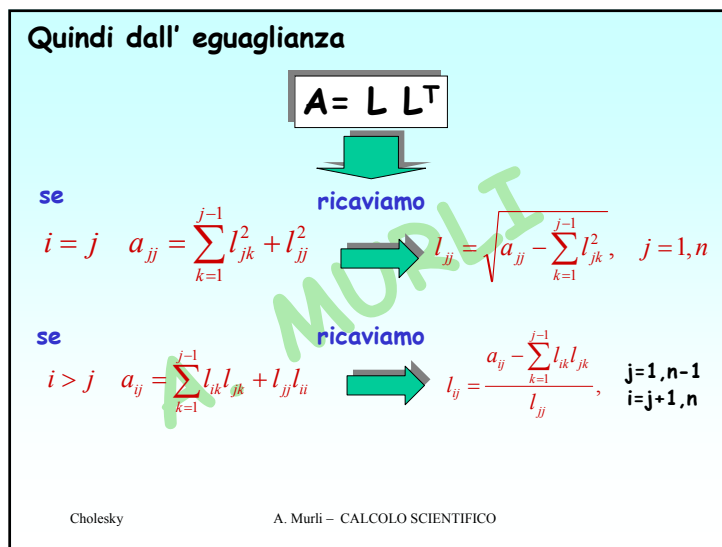
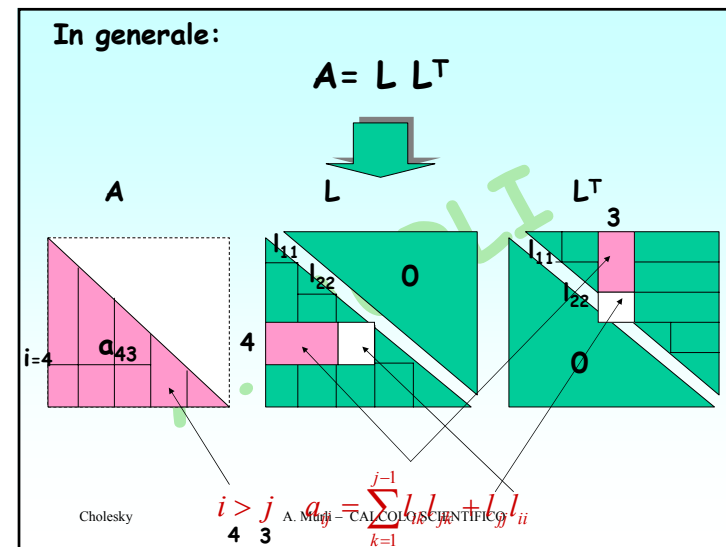
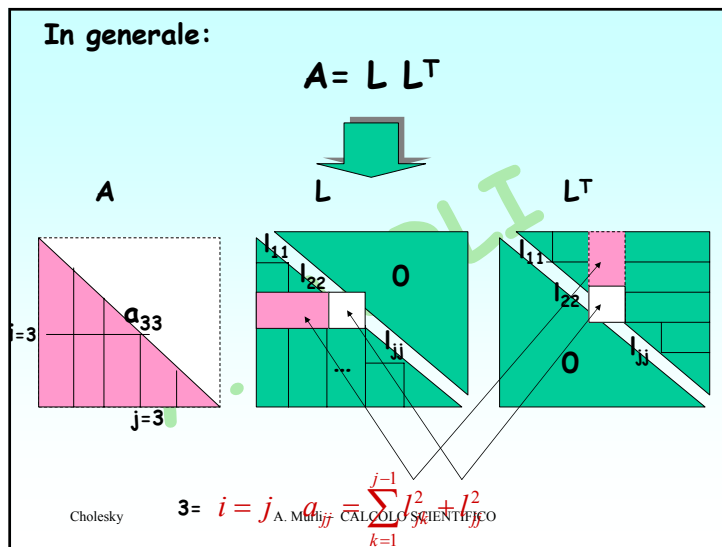
$$4 = l_{31}l_{21} + l_{22}l_{32} \Rightarrow l_{32} = (4 + 2)/3 = 2$$

$$24 = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 \Rightarrow l_{33} = \sqrt{24 - 4 - 4} = 4$$

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO



Complessità di tempo

Al passo j:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad j=1, n$$

- il calcolo di 1 l_{jj} .

Ciascun l_{jj} richiede $(j-1)M + jA + 1$ radice quad.

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}},$$

- il calcolo di $(n-j) l_{ij}$.

Ciascun l_{ij} richiede $jM + jA \rightarrow (n-j)(jM + jA)$

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

In totale, dopo n passi:

$$\sum_{j=1}^n (j-1)M + jA + (n-j)(jM + jA) =$$

$$= \sum_{j=1}^n jM - nM + \sum_{j=1}^n jA + n \sum_{j=1}^n jM + n \sum_{j=1}^n jA - \sum_{j=1}^n j^2 M - \sum_{j=1}^n j^2 A = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

$$T_{\text{chol}}(n) = O(n^3/6)$$

Inoltre...

$$T_{\text{chol}}(n) = T_{\text{Gauss}}(n)/2$$

L'Algoritmo di Cholesky ha una complessità di TEMPO che è la meta' di quella dell'Algoritmo di Gauss!!

Complessità di spazio

A è simmetrica →

Si memorizza soltanto una metà degli elementi

L è triangolare →

Si memorizzano solo gli elementi non nulli

Algoritmo in place

$$S(n) = O(n^2/2)$$

L'Algoritmo di Cholesky ha una complessità di SPAZIO che è la meta' di quella dell'Algoritmo di Gauss!!

Quando è possibile applicare la fattorizzazione LL^T ad una matrice simmetrica e a diagonale dominante ?

OVVERO

Quando una matrice simmetrica a diagonale dominante è anche definita positiva ?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice A è:

TEOREMA

- non singolare ($\det(A) = 209$)
- simmetrica
- a diagonale dominante
- ha gli elementi sulla diagonale non negativi



A è definita positiva

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

Fine Lezione!

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

L'algoritmo di Cholesky è

stabile

?

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

ESEMPIO 1

Applichiamo l'algoritmo di Cholesky alla matrice simmetrica definita positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 0.0001 & 0.01 \\ 0.01 & 100 \end{pmatrix}$$

Rappresentando A in un sistema in un sistema aritmetico a precisione finita:

$$\mathfrak{A} : \beta = 10, \quad t = 2$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0.1 \times 10^{-3} & 0.1 \times 10^{-1} \\ 0.1 \times 10^{-1} & 0.1 \times 10^3 \end{pmatrix} = A$$

Cholesky

A. Murli – CALCOLO SCIENTIFICO

ESEMPIO 1 (cont.)

Effettuiamo la fattorizzazione in \mathfrak{L} :

$$\bar{l}_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}} = 0.1 \times 10^{-1}$$

$$\bar{l}_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{\bar{l}_{1,1}} = \frac{0.1 \times 10^{-1}}{0.1 \times 10^{-1}} = 0.1 \times 10^1$$

$$\bar{l}_{2,2} = \sqrt{a_{2,2} - \bar{l}_{2,1}^2} = \sqrt{0.1 \times 10^3 - (0.1 \times 10^1)^2} = 0.1 \times 10^2$$

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 0.1 \times 10^{-1} & 0 \\ 0.1 \times 10^1 & 0.1 \times 10^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.1 \times 10^{-3} & 0.1 \times 10^{-1} \\ 0.1 \times 10^{-1} & 0.1 \times 10^3 \end{pmatrix} = A$$

Gli elementi di \bar{L} non crescono "eccessivamente" rispetto a quelli di A

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

La crescita degli elementi di L è sempre

limitata

?

Cholesky

A. Murli - CALCOLO SCIENTIFICO

In generale (IDEA INTUITIVA)

Osservando che nell'algoritmo di Cholesky

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 + l_{jj}^2 = l_{j,1}^2 + l_{j,2}^2 + l_{j,2}^2 + \dots + l_{j,j}^2 \quad j=1, \dots, n$$

$$|l_{j,k}| \leq \sqrt{a_{j,j}} \quad \begin{matrix} k=1, \dots, j \\ j=1, \dots, n \end{matrix}$$

Per ogni fissata riga gli elementi di L sono limitati dalla radice quadrata dell'elemento diagonale di A

Gli elementi di L NON possono crescere in modo tale da invalidare il calcolo!!
(Algoritmo Stabile)

Cholesky