

Calcolo Parallelo

Prodotto Matrice-Vettore

a.a. 2003-2004

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

1

PROBLEMA: Prodotto Matrice-Vettore

Progettazione
di un algoritmo parallelo
per architettura MIMD
a memoria distribuita
per il calcolo del prodotto
di una matrice A per un vettore x :

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

2

Qual è l'algoritmo sequenziale?

Algoritmo sequenziale

```
for i=0,n-1 do
```

```
  yi = 0
```

```
  for j=0,n-1 do
```

```
    yi = yi + aij * xj
```

```
  endfor
```

```
endfor
```

Prodotto Matrice-Vettore

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

3

In particolare...

Algoritmo sequenziale

```
for i=0,n-1 do
```

```
  yi = 0
```

```
  for j=0,n-1 do
```

```
    yi = yi + aij * xj
```

```
  endfor
```

```
endfor
```

Su un calcolatore tradizionale il
vettore y
viene "generalmente" calcolato
componente per componente
secondo un ordine prestabilito

L' i -esimo elemento di y
è il prodotto scalare della
 i -esima riga di A per il vettore x

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

4

Domanda

Qual è
l'algoritmo parallelo

ovvero

Come decomporre
il problema
Matrice-Vettore ?

Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

5

DECOMPOSIZIONE: IDEA GENERALE

Decomporre un problema di dimensione N
in P sottoproblemi di dimensione N/P
e risolverli **contemporaneamente**
su più calcolatori



Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

6

IDEA!

Decomposizione del problema
Matrice Vettore

Partizionamento della matrice A

IN BLOCCHI

Riformulazione dell'algoritmo sequenziale
"A BLOCCHI"

Parallelismo dell'algoritmo
"A BLOCCHI"

Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

7

I STRATEGIA

Decomposizione 1

suddividiamo la
matrice A in

BLOCCHI di RIGHE

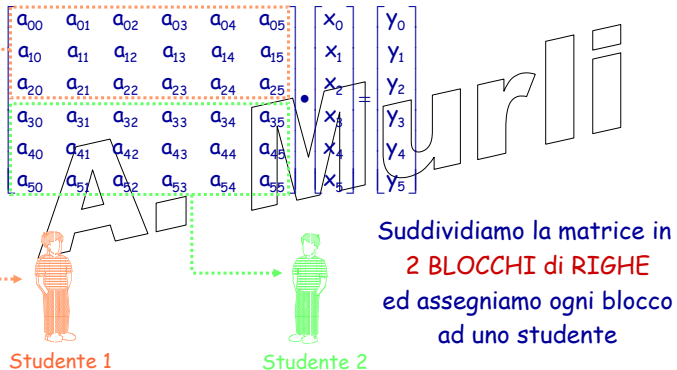
Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

8

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione della matrice A per blocchi di righe



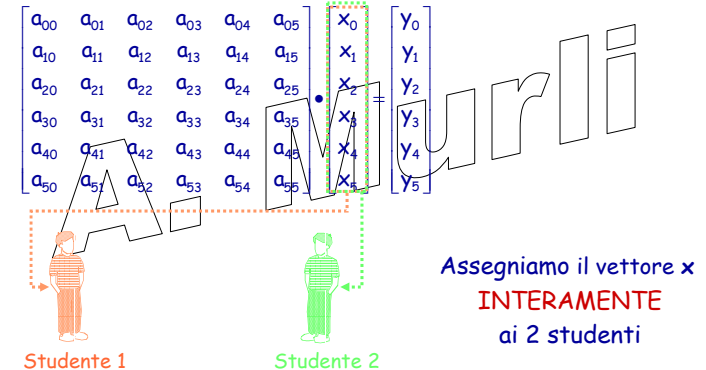
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

9

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione del vettore x



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

10

Domanda

Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente

A. Muri ?

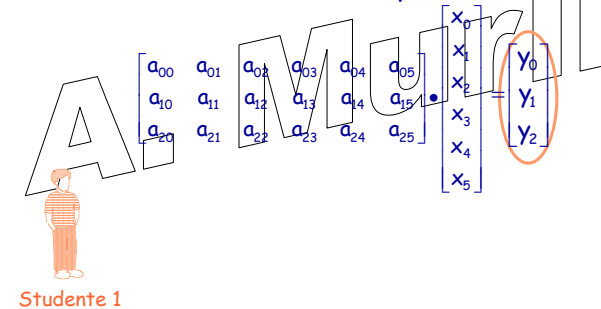
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

11

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 può calcolare
SOLO le prime tre componenti
del vettore y



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

12

I STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 può calcolare
SOLO le altre tre componenti
del vettore y



Matrice - Vettore

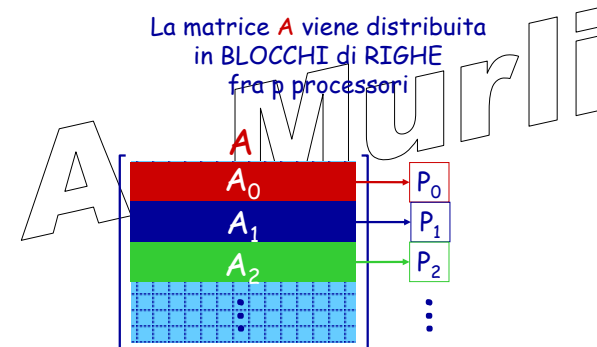
A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

13

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di RIGHE
fra p processori



Matrice - Vettore

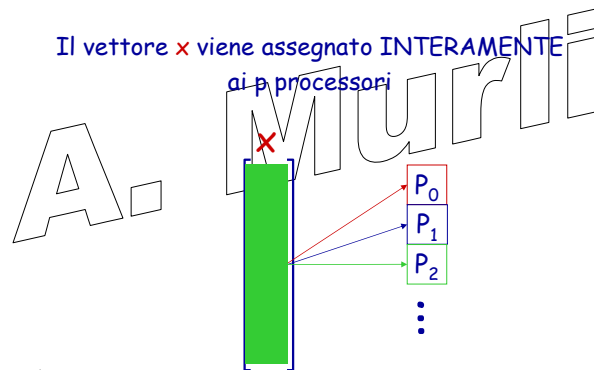
A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

14

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene assegnato INTERAMENTE
ai p processori



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

15

I STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo
 $A_i \cdot x = y_i$



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

16

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
con la I Strategia
di decomposizione

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di righe

Algoritmo a blocchi

```
begin
  for i=0 to p-1 do
     $y_i = A_i x$ 
  endfor
end
```

Distribuzione dei
blocchi fra i
processori

Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di righe

Algoritmo a blocchi

```
begin
  for i=0 to p-1 do
     $y_i = A_i x$ 
  endfor
end
```

Algoritmo parallelo

```
begin
  forall  $P_i, i=0, p-1$ 
     $\{P_i \text{ calcola } y_i = A_i x\}$ 
  endfor
end
```

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

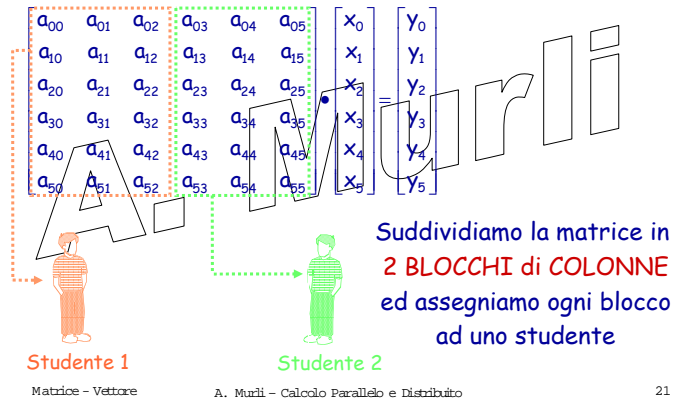
II STRATEGIA

suddividiamo
la matrice A in

BLOCCHI di COLONNE

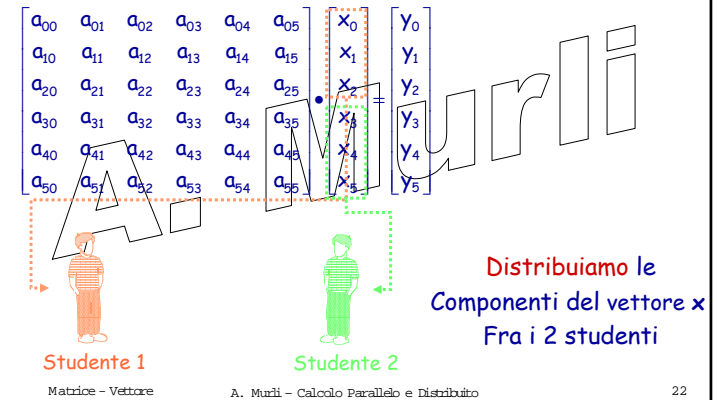
II STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione della matrice A per blocchi di colonne



II STRATEGIA: Esempio n= 6

Distribuzione del vettore x



Domanda

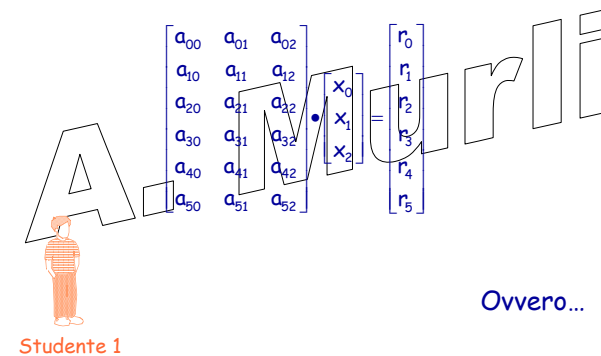
Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare
ciascuno studente?

Matrice - Vettore
A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

23

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 calcola



24

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 1 calcola
"un contributo" del prodotto finale

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{bmatrix}$$

Studente 1

Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

25

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 calcola

$$\begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$

Ovvero...

Studente 2

Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

26

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Lo studente 2 calcola
"un contributo" del prodotto finale

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \\ a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \\ a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45}x_5 \\ a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{bmatrix}$$

Studente 2

Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

27

Domanda

Come calcolare

il vettore

$$y = r + s$$

?

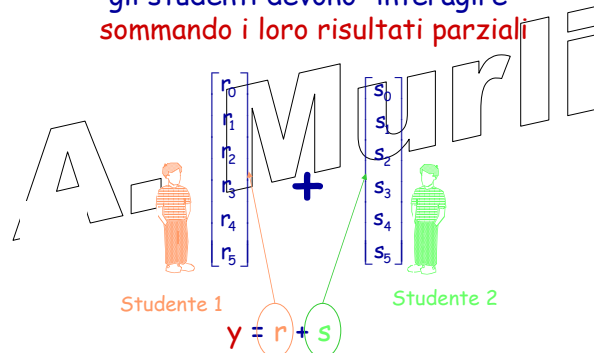
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

28

II STRATEGIA: Esempio n= 6

Per ottenere il vettore y
gli studenti devono "interagire"
sommando i loro risultati parziali



Matrice - Vettore

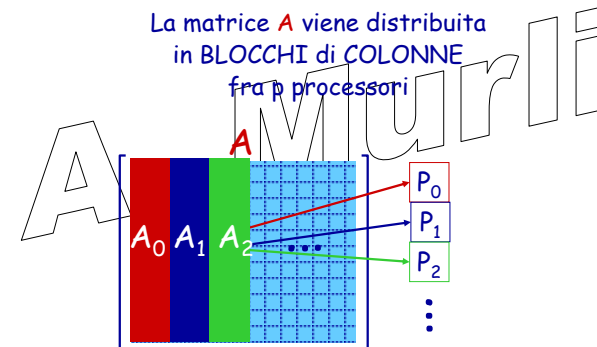
A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

29

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



Matrice - Vettore

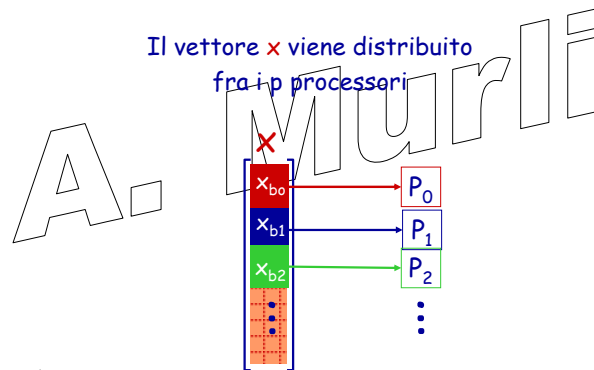
A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

30

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene distribuito
fra p processori



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

31

II STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto

in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x_{bi} = r_i \text{ dove } y = \sum_{i=0}^{p-1} r_i$$

Ciascun processore calcola

un prodotto matrice vettore

(di dimensione più piccola di quello assegnato).

Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

32

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
con la **II Strategia**
di decomposizione

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di colonne

```
begin
  y=0
  for i=0 to p-1 do
     $r_i = A_i \cdot x_{bi}$ 
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```

Distribuzione dei
blocchi fra i
processori

Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di colonne

```
begin
  y=0
  for i=0 to p-1 do
     $r_i = A_i \cdot x_i$ 
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```

Algoritmo parallelo

```
begin
  forall  $P_i, i=0, p-1$ 
    {  $P_i$  calcola  $r_i = A_i \cdot x_{bi}$  }
    { combinazione degli  $r_i$  }
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```

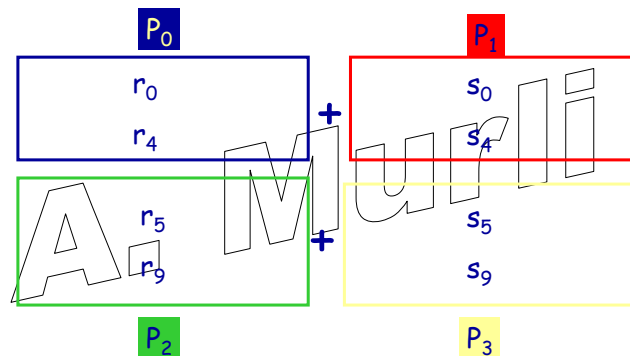
Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

Domanda

E' possibile realizzare
un'altra decomposizione
del problema:
prodotto
Matrice-Vettore

?

Esempio $N = 9$, $P=4$



Comunicazione: somma in parallelo

Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

41

III strategia: sintesi

Ciascun processore calcola

somme parziali

di alcune componenti del vettore y

I processori devono sommare i risultati parziali

e scambiarsi le componenti

per avere il risultato finale, y

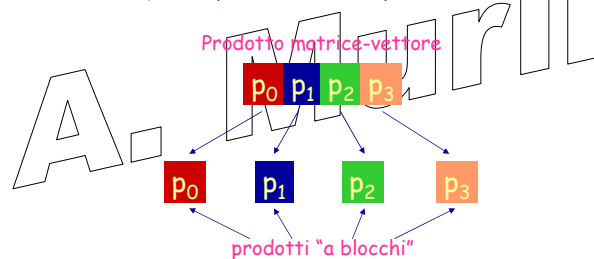
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

42

IDEA GENERALE: matrice vettore in parallelo

Riformulazione del prodotto matrice vettore in
"prodotti a blocchi" ed assegnazione di ciascun di
questi prodotti ad un processore



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

43

FINE LEZIONE

Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

44