

Calcolo Parallelo

Prodotto Matrice-Vettore

a.a. 2003-2004

Approfondimenti...

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

1

PROBLEMA: Prodotto Matrice-Vettore

Progettazione
di un algoritmo parallelo
per architettura MIMD
a memoria distribuita
per il calcolo del prodotto
di una matrice A per un vettore x :

$$Ax = y, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

2

IDEA!

Decomposizione del problema

Matrice Vettore

Partizionamento della matrice A

IN BLOCCHI

Riformulazione dell'algoritmo sequenziale

"A BLOCCHI"

Parallelismo dell'algoritmo

"A BLOCCHI"

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

3

I STRATEGIA

Decomposizione 1

suddividiamo la
matrice A in

BLOCCHI di RIGHE

Matrice - Vettore

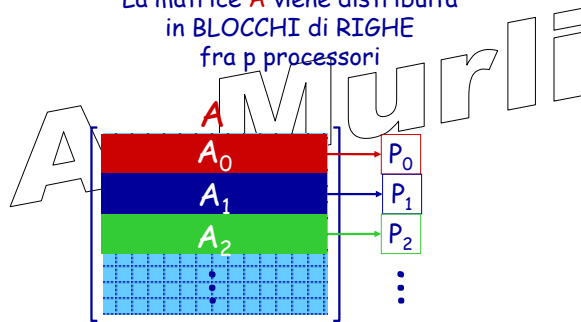
A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

4

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di RIGHE
fra p processori



Matrice - Vettore

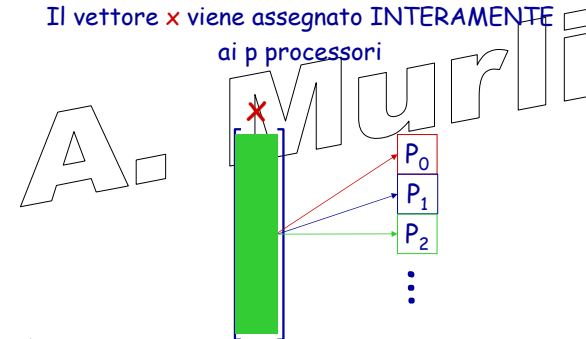
A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

5

I STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene assegnato INTERAMENTE
ai p processori



Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

6

I STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x = y_i$$



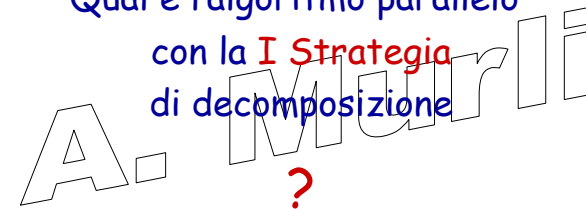
Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

7

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
con la I Strategia
di decomposizione



Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

8

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di righe

Algoritmo a blocchi

```
begin
  for  $i=0$  to  $p-1$  do
     $y_i = A_i x$ 
  endfor
end
```

Algoritmo parallelo

```
begin
  forall  $P_i, i=0, p-1$ 
     $\{P_i \text{ calcola } y_i = A_i x\}$ 
  endfor
end
```

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

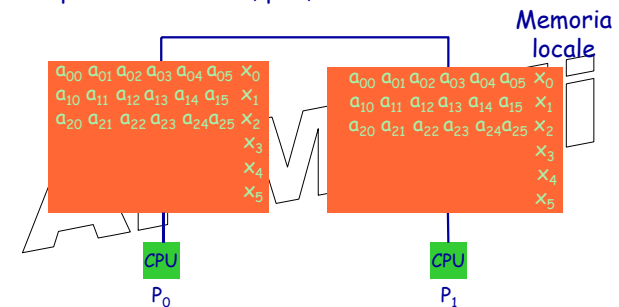
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

9

I Strategia: Distribuzione dei dati

Esempio: MIMD - DM , $p=2, N=6$



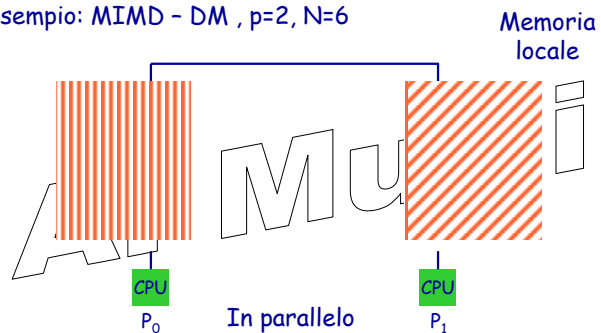
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

10

I Strategia: Fase di calcolo

Esempio: MIMD - DM , $p=2, N=6$



$a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5$ $a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5$
 $a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5$ $a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5$
 $a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5$ $a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5$

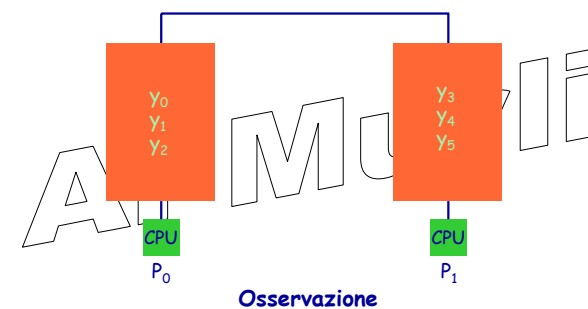
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

11

I Strategia: Risultato finale

Esempio: MIMD - DM , $p=2, N=6$



i processori P_0 e P_1 possono effettuare un'operazione collettiva di tipo "gather" riunendo i risultati parziali

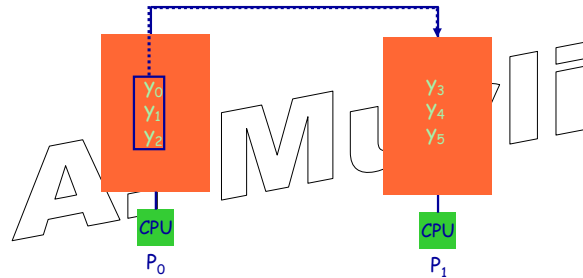
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

12

I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM , $p=2$, $N=6$



P_0 spedisce a P_1 le componenti calcolate di y

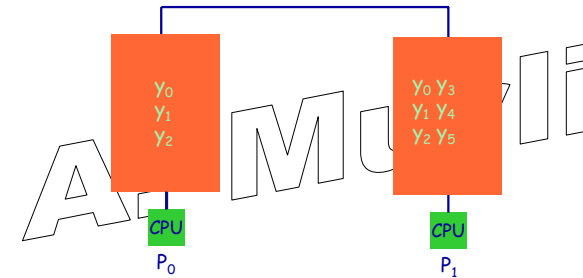
Matrice - Vettore

A. Muzii - Calcolo Parallelo e Distribuito

13

I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM , $p=2$, $N=6$



P_1 le riunisce in maniera opportuna

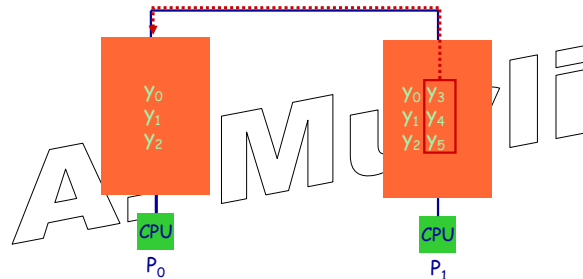
Matrice - Vettore

A. Muzii - Calcolo Parallelo e Distribuito

14

I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM , $p=2$, $N=6$



P_1 spedisce a P_0 le componenti calcolate di y

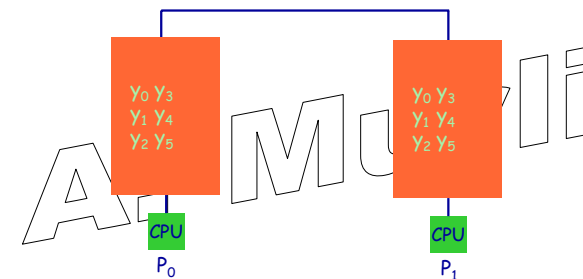
Matrice - Vettore

A. Muzii - Calcolo Parallelo e Distribuito

15

I Strategia: operazione "gather"

Esempio: MIMD - DM , $p=2$, $N=6$



P_0 le riunisce in maniera opportuna

Entrambi i processori hanno il risultato finale!

Matrice - Vettore

A. Muzii - Calcolo Parallelo e Distribuito

16

II STRATEGIA

Decomposizione 2

suddividiamo
la matrice A in

BLOCCHI di COLONNE

Matrice - Vettore

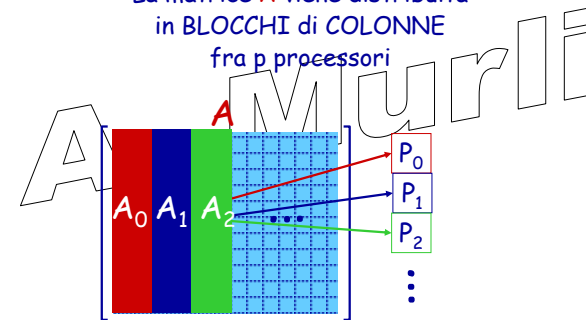
A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

17

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

La matrice A viene distribuita
in BLOCCHI di COLONNE
fra p processori



Matrice - Vettore

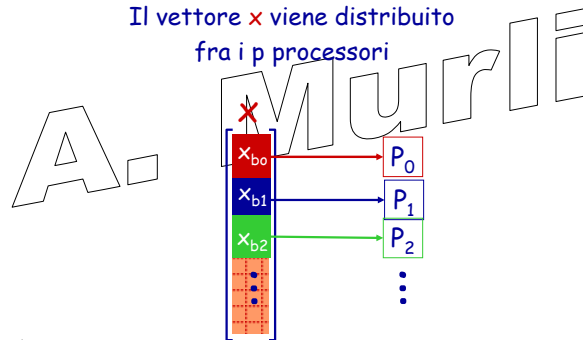
A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

18

II STRATEGIA: In generale

I passo: decomposizione del problema

Il vettore x viene distribuito
fra p processori



Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

19

II STRATEGIA: In generale

II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto $Ax=y$ viene decomposto
in p prodotti del tipo

$$A_i \cdot x_{bi} = r_i \text{ dove } y = \sum_{i=0}^{p-1} r_i$$

Ciascun processore calcola

un prodotto matrice vettore

(di dimensione più piccola di quello assegnato).

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

20

Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo
con la **II Strategia**
di decomposizione

A. Murli

Risposta

Partizionamento della matrice
in blocchi di colonne

Algoritmo parallelo

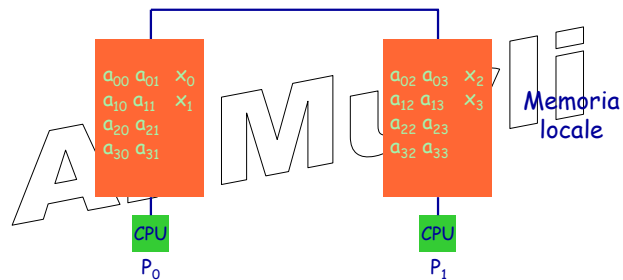
```
begin
  y=0
  for i=0 to p-1 do
     $r_i = A_i \cdot x_i$ 
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```

```
begin
  forall  $p_i, i=0, p-1$ 
    {  $p_i$  calcola  $r_i = A_i \cdot x_{b_i}$  }
    { combinazione degli  $r_i$  }
     $y = y + r_i$ 
  endfor
end
```

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

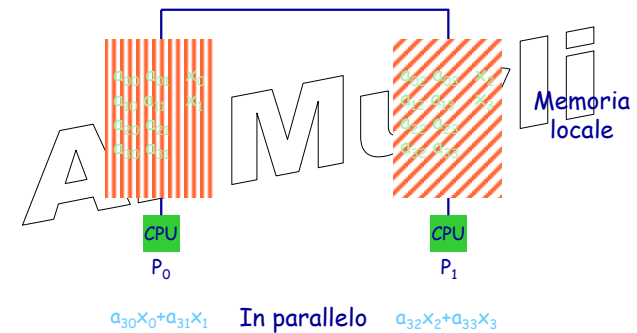
II Strategia: Distribuzione dei dati

Esempio: $N=4, p=2$



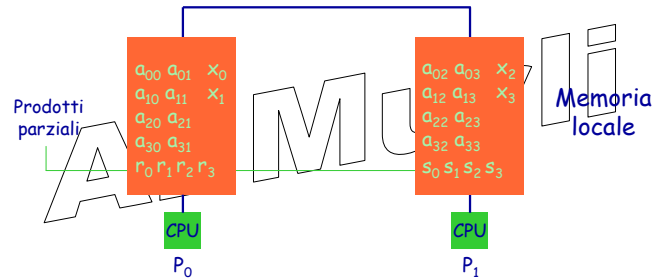
II Strategia: Fase di calcolo

Esempio: $N=4, p=2$



II Strategia

Esempio: $N=4, p=2$



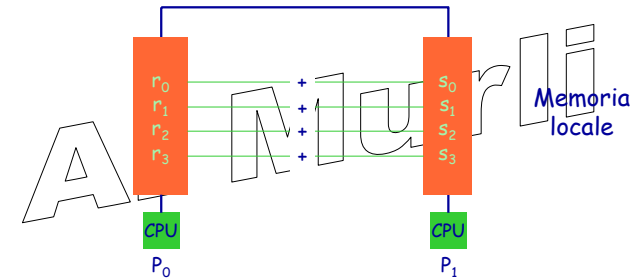
Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

25

II Strategia

Esempio: $N=4, p=2$



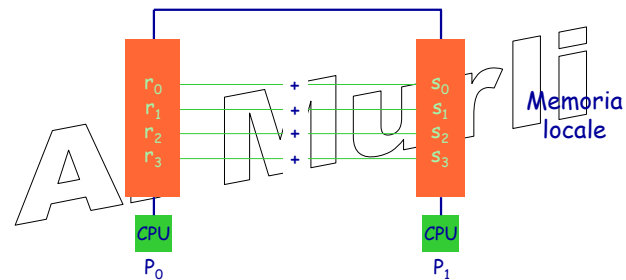
Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

26

Come sommare i due vettori ?

Esempio: $N=4, p=2$



Matrice - Vettore

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

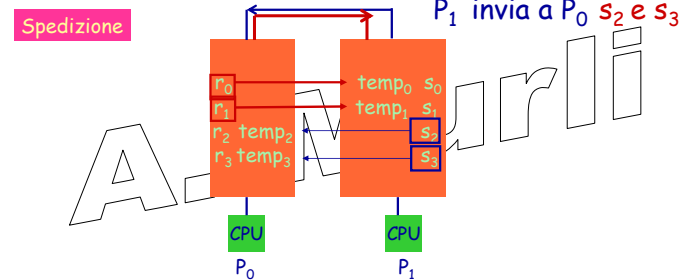
27

Esempio: $N=4, p=2$

I passo

P_0 invia a P_1 r_0 e r_1

P_1 invia a P_0 s_2 e s_3



Calcolo in P_0

$y_2 = s_2 + temp_2$

Calcolo in P_1

$y_0 = r_0 + temp_0$

$y_3 = s_3 + temp_3$

$y_1 = r_1 + temp_1$

Matrice - Vettore

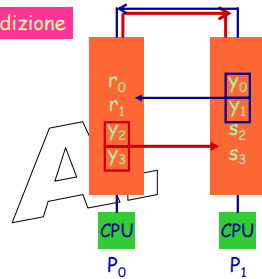
A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

28

Esempio: $N=4$, $p=2$

II passo

Spedizione



P_0 invia a P_1 y_2 e y_3

P_1 invia a P_0 y_0 e y_1

Al termine del II passo
entrambi i processori
hanno tutto il vettore y

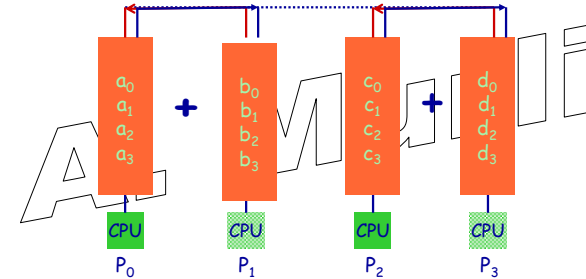
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

29

Esempio $N=4$, $p=4$

I passo



P_0 e P_1 calcolano in parallelo la somma di 2 vettori
 P_2 e P_3 calcolano in parallelo la somma di 2 vettori

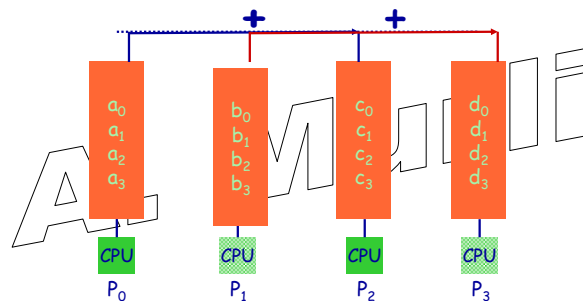
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

30

Esempio $N=4$, $p=4$

II passo



P_1 e P_3 calcolano in parallelo la somma di 2 vettori

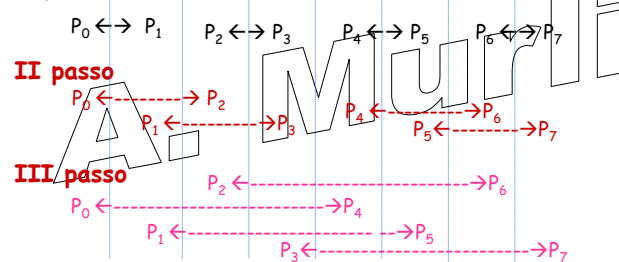
Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

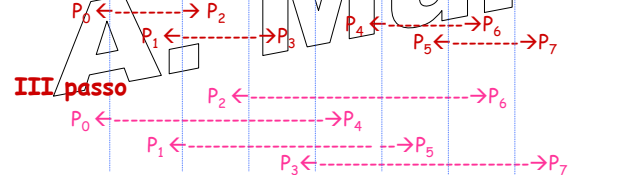
31

Esempio $N=8$, $p=8$

I passo



II passo



III passo



Matrice - Vettore

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

32

Domanda

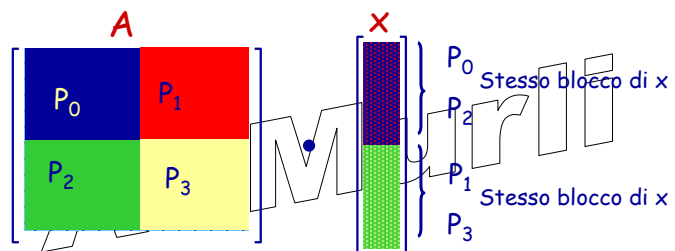
E' possibile realizzare
un'altra decomposizione
del problema:
prodotto
Matrice-Vettore
?

Risposta: SI!

Decomposizione 1: BLOCCHI di RIGHE
+
Decomposizione 2: BLOCCHI di COLONNE
=
Decomposizione 3: BLOCCHI QUADRATI

III Strategia: Esempio (4 processori)

Distribuzione della matrice A per blocchi quadrati

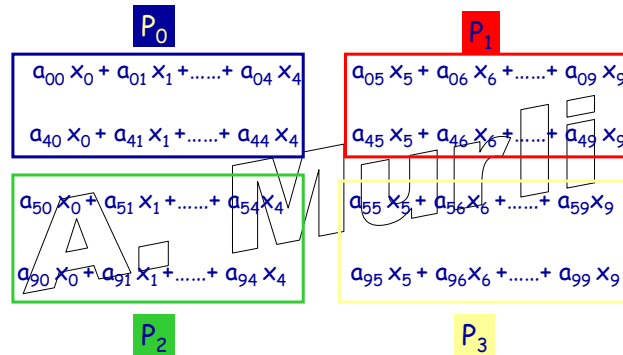


Distribuzione del vettore x fra i processori

Domanda

Ciascun processore
quale "parte" di y
calcola
?

Esempio $N = 9$, Processori=4



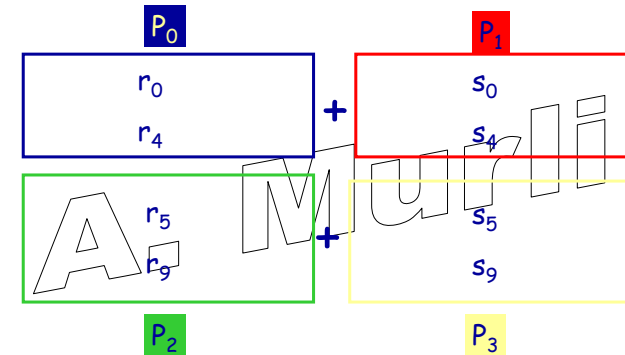
Calcolo dei prodotti parziali

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

37

Esempio $N = 9$, $P=4$



Comunicazione: somma in parallelo

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

38

III strategia: sintesi

Ciascun processore calcola

somme parziali

di alcune componenti del vettore y

I processori devono sommare i risultati parziali

e scambiarsi le componenti

per avere il risultato finale, y

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

39

FINE LEZIONE

Matrice - Vettore

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

40