

## Calcolo Parallelo e distribuito

Prodotto Matrice per Matrice  
a.a. 2003/2004

1

## Problema

Progettazione  
di un algoritmo parallelo  
per architettura **MIMD**  
a memoria distribuita  
per il calcolo di una matrice **C**  
risultante dal **prodotto righe per colonne**  
di 2 matrici **A** e **B**:

$$C = A \cdot B, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

2

## Domanda

Qual è l'algoritmo sequenziale ?

```
for i=0,n-1 do
  for j=0,n-1 do
    cij = 0
    for k=0,n-1 do
      cij = cij + aik bkj
    endfor
  endfor
endfor
```

$$A \cdot B = C, \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Calcolo Parallelo e Distribuito

3

## Domanda

Qual è l'algoritmo sequenziale ?

```
for i=0,n-1 do
  for j=0,n-1 do
    cij = 0
    for k=0,n-1 do
      cij = cij + aik bkj
    endfor
  endfor
endfor
```

Su un calcolatore tradizionale  
la matrice **C**  
viene "generalmente" calcolata  
componente per componente  
secondo un ordine prestabilito

Il generico elemento di **C**  
è il prodotto scalare della  
*i*-esima riga di **A** per la  
*j*-esima colonna di **B**

Calcolo Parallelo e Distribuito

4

## Domanda

Qual è  
l'algoritmo parallelo

?

ovvero

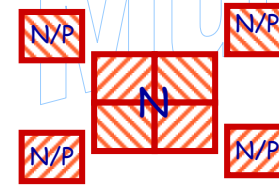
Come decomporre  
il problema  
Matrice-Matrice ?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

5

## DECOMPOSIZIONE: IDEA GENERALE

Decomporre un problema di dimensione  $N$   
in  $P$  sottoproblemi di dimensione  $N/P$   
e risolverli **contemporaneamente**  
su più calcolatori



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

6

## IDEA!

Decomposizione del problema  
Matrice per Matrice

Partizionamento delle matrici  $A$  e  $B$

IN BLOCCHI

Riformulazione dell'algoritmo sequenziale  
"A BLOCCHI"

Parallelismo dell'algoritmo  
"A BLOCCHI"

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

7

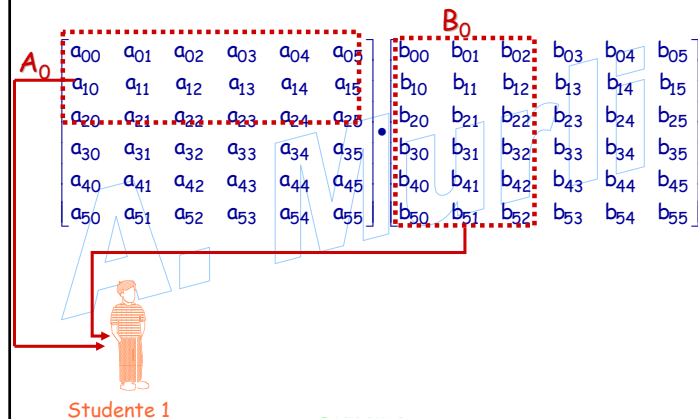
## I STRATEGIA

suddividiamo  
la matrice  $A$  in  
blocchi di **RIGHE**  
e la matrice  $B$  in  
blocchi di **COLONNE**

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

8

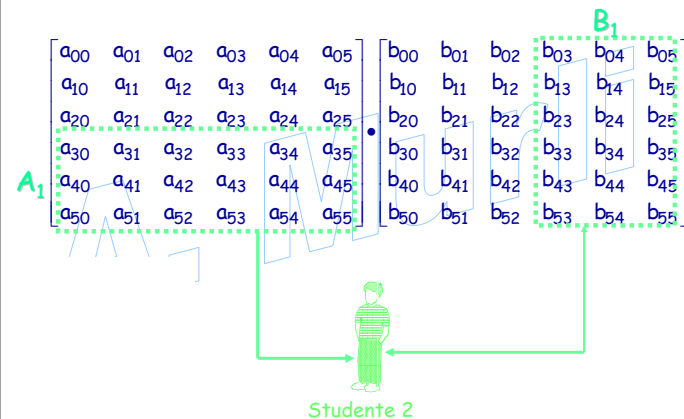
## Distribuzione dei dati: Esempio n=6



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

9

## Distribuzione dei dati: Esempio n=6



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

10

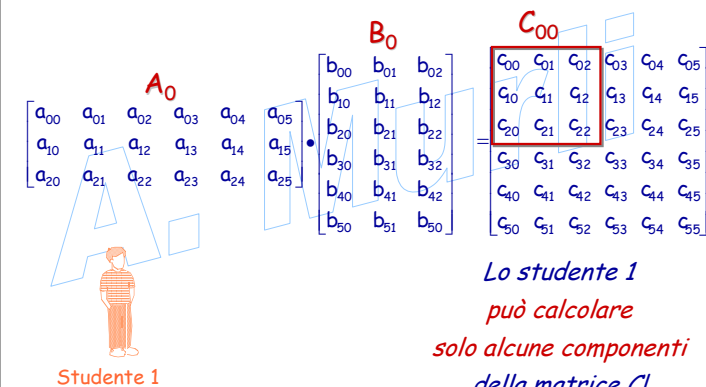
## Domanda

Con i dati così distribuiti  
cosa può calcolare  
ciascuno studente?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

11

## I Strategia: Esempio n=6



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

12

## I Strategia: Esempio n=6

Lo studente 2  
può calcolare  
solo alcune componenti  
della matrice C!

Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

13

## Osservazione

Con la distribuzione effettuata  
dei blocchi di A e B  
gli studenti hanno calcolato  
solo alcune componenti di C!

Studente 1

Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

14

## Domanda

Come calcolare le altre  
componenti di C?

Studente 1

Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

15

## IDEA!

Gli studenti possono "interagire"  
scambiandosi  
i blocchi di COLONNE della matrice B!

Studente 1

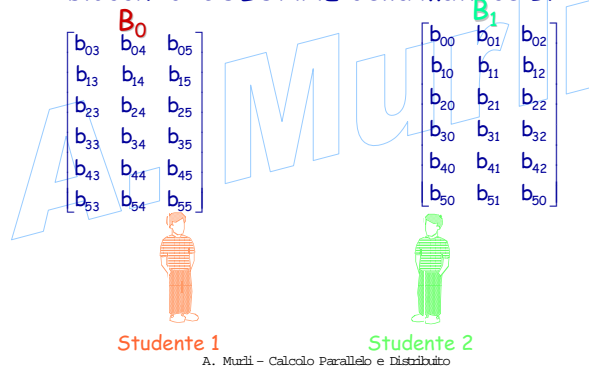
Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

16

## IDEA!

Gli studenti possono "interagire"  
scambiandosi  
i blocchi di COLONNE della matrice B!



A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

17

## Domanda

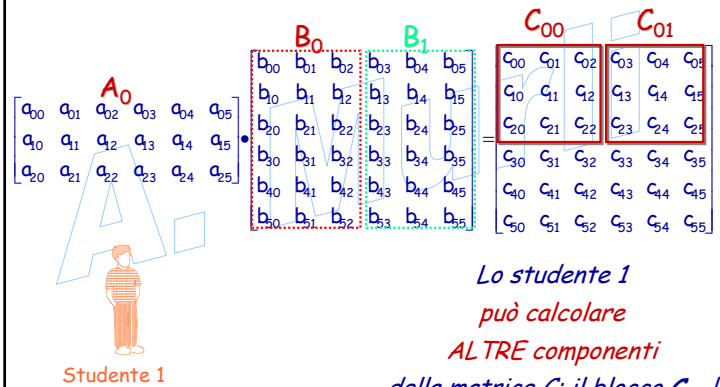
Dopo lo scambio  
dei blocchi di B  
cosa può calcolare  
ciascuno studente  
?

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

18

## I Strategia: Esempio n=6

Lo studente 1 ha ora anche l'altro blocco di B!



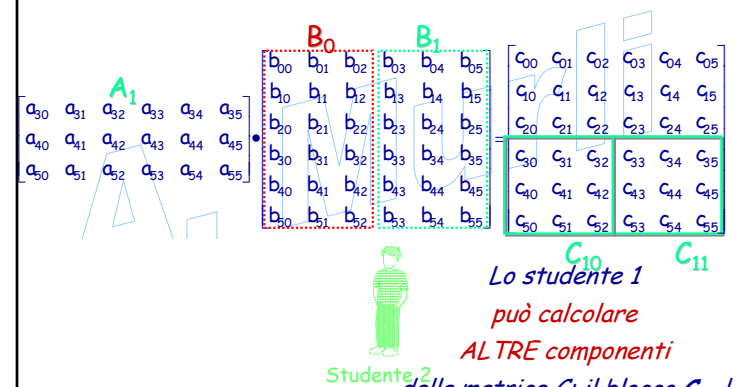
A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

19

Lo studente 1  
può calcolare  
ALTRE componenti  
della matrice C: il blocco  $C_{01}$ !

## I Strategia: Esempio n=6

Lo studente 2 ha ora anche l'altro blocco di B!



A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

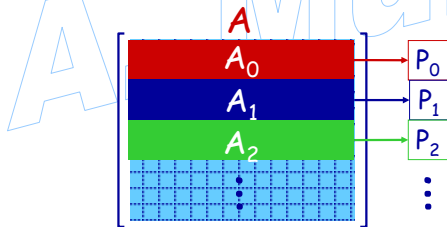
20

Lo studente 2  
può calcolare  
ALTRE componenti  
della matrice C: il blocco  $C_{10}$ !

## I STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

La matrice **A** viene distribuita  
in BLOCCHI di RIGHE  
fra  $p$  processori



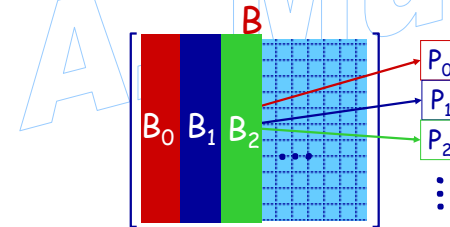
A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

21

## I STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

La matrice **B** viene distribuita  
in BLOCCHI di COLONNE  
fra  $p$  processori



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

22

## I STRATEGIA: In generale

### II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto  $A \cdot B = C$  viene decomposto  
in  $p \times p$  prodotti del tipo

$$A_i \cdot B_j = C_{ij}$$

Ciascun processore calcola

$p$  prodotti matrice matrice

(di dimensione più piccola di quello assegnato!).

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

23

## Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo  
della I Strategia  
di decomposizione

?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

24

## Risposta

Partizionamento di  
A in blocchi di righe  
B in blocchi di colonne

### Algoritmo a blocchi

```
begin
for i=0 to p-1 do
  for j=0 to p-1 do
     $C_{ij} = A_i \cdot B_j$ 
  endfor
endfor
end
```

Distribuzione dei  
blocchi fra i  
processori

Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

25

## Risposta

Partizionamento di  
A in blocchi di righe  
B in blocchi di colonne

### Algoritmo a blocchi

```
begin
for i=0 to p-1 do
  for j=0 to p-1 do
     $C_{ij} = A_i \cdot B_j$ 
  endfor
endfor
end
```

### Algoritmo parallelo

```
Begin
for j=0 to p-1 do
  forall  $P_i$ ,  $i=0, p-1$ 
    {  $P_i$  calcola  $C_{ij} = A_i \cdot B_j$  }
    send( $B_j$ ,  $P_{i+1}$ ) {  $p+1 = 0$  }
    recv( $B_{i-1}$ ,  $P_{i-1}$ ) {  $-1 = P$  }
  endfor
end
```

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

26

## II strategia

*La strategia al contrario!*

suddividiamo  
la matrice A in  
blocchi di COLONNE  
e la matrice B in  
blocchi di RIGHE

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

27

## Distribuzione dei dati: Esempio n=6

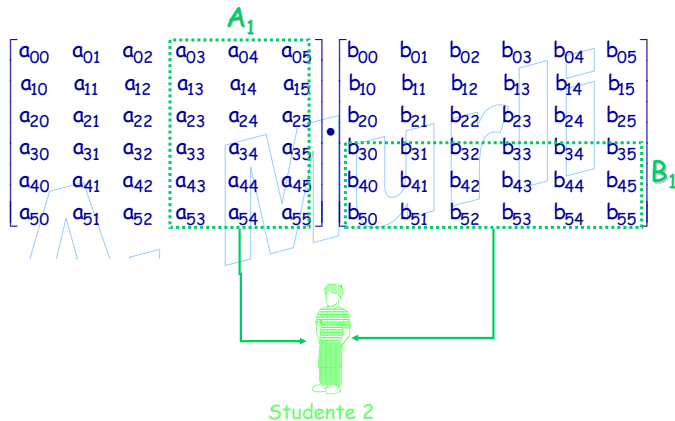
$A_0$						$B_0$					
$a_{00}$	$a_{01}$	$a_{02}$	$a_{03}$	$a_{04}$	$a_{05}$	$b_{00}$	$b_{01}$	$b_{02}$	$b_{03}$	$b_{04}$	$b_{05}$
$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$a_{14}$	$a_{15}$	$b_{10}$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{14}$	$b_{15}$
$a_{20}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{24}$	$a_{25}$	$b_{20}$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{24}$	$b_{25}$
$a_{30}$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$a_{34}$	$a_{35}$	$b_{30}$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$	$b_{34}$	$b_{35}$
$a_{40}$	$a_{41}$	$a_{42}$	$a_{43}$	$a_{44}$	$a_{45}$	$b_{40}$	$b_{41}$	$b_{42}$	$b_{43}$	$b_{44}$	$b_{45}$
$a_{50}$	$a_{51}$	$a_{52}$	$a_{53}$	$a_{54}$	$a_{55}$	$b_{50}$	$b_{51}$	$b_{52}$	$b_{53}$	$b_{54}$	$b_{55}$

Studente 1

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

28

## Distribuzione dei dati: Esempio n=6



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

29

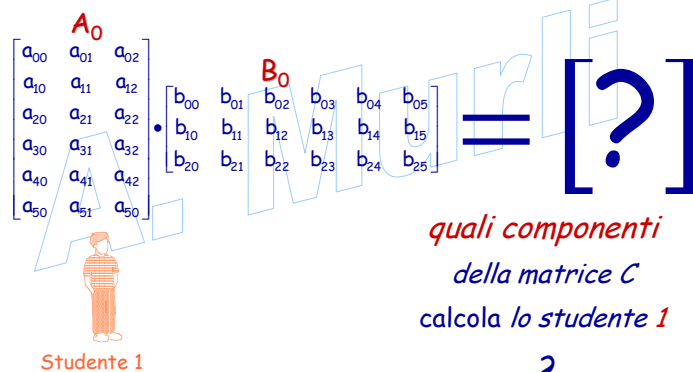
## Domanda

Con i dati così distribuiti  
cosa può calcolare  
ciascuno studente?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

30

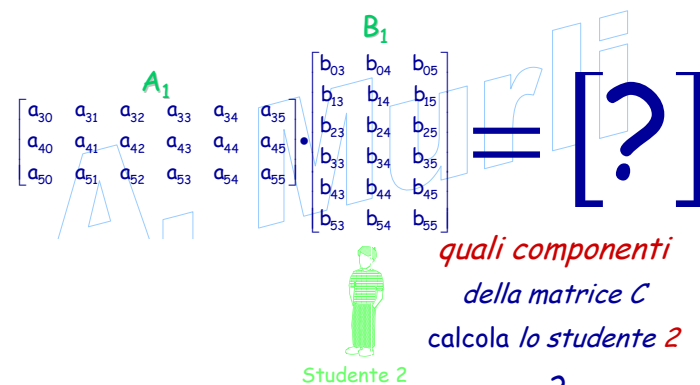
## II Strategia: Esempio n=6



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

31

## II Strategia: Esempio n=6



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

32



Osservazione: esempio  $n = 6$

Il generico elemento della matrice  $C$  è uguale a:

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^5 a_{ik} b_{kj} \quad i,j=0,5$$

$k$  = Indice delle **colonne** di  $A$   
e Indice di **riga** di  $B$

*I 2 studenti possiedono ciascuno  
un blocco di colonne di  $A$   
un blocco di righe di  $B$ !!*

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

Pertanto... 33

Pertanto...

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^5 a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=0}^2 a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=3}^5 a_{ik} b_{kj}$$

$i,j=0,5$

*Ciascun studente calcola  
"un contributo"*

*di ciascun elemento  
della matrice  $C$ !*

Studente 1

Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

34

Ovvero, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00}^1 & c_{01}^1 & c_{02}^1 & c_{03}^1 & c_{04}^1 & c_{05}^1 \\ c_{10}^1 & c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{13}^1 & c_{14}^1 & c_{15}^1 \\ c_{20}^1 & c_{21}^1 & c_{22}^1 & c_{23}^1 & c_{24}^1 & c_{25}^1 \\ c_{30}^1 & c_{31}^1 & c_{32}^1 & c_{33}^1 & c_{34}^1 & c_{35}^1 \\ c_{40}^1 & c_{41}^1 & c_{42}^1 & c_{43}^1 & c_{44}^1 & c_{45}^1 \\ c_{50}^1 & c_{51}^1 & c_{52}^1 & c_{53}^1 & c_{54}^1 & c_{55}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{00}^2 & c_{01}^2 & c_{02}^2 & c_{03}^2 & c_{04}^2 & c_{05}^2 \\ c_{10}^2 & c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 & c_{15}^2 \\ c_{20}^2 & c_{21}^2 & c_{22}^2 & c_{23}^2 & c_{24}^2 & c_{25}^2 \\ c_{30}^2 & c_{31}^2 & c_{32}^2 & c_{33}^2 & c_{34}^2 & c_{35}^2 \\ c_{40}^2 & c_{41}^2 & c_{42}^2 & c_{43}^2 & c_{44}^2 & c_{45}^2 \\ c_{50}^2 & c_{51}^2 & c_{52}^2 & c_{53}^2 & c_{54}^2 & c_{55}^2 \end{bmatrix}$$

*Ciascun studente calcola*

*"un contributo"*

*dell'intera matrice  $C$ !*

Studente 1

Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

35

Ovvero, in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00}^1 & c_{01}^1 & c_{02}^1 & c_{03}^1 & c_{04}^1 & c_{05}^1 \\ c_{10}^1 & c_{11}^1 & c_{12}^1 & c_{13}^1 & c_{14}^1 & c_{15}^1 \\ c_{20}^1 & c_{21}^1 & c_{22}^1 & c_{23}^1 & c_{24}^1 & c_{25}^1 \\ c_{30}^1 & c_{31}^1 & c_{32}^1 & c_{33}^1 & c_{34}^1 & c_{35}^1 \\ c_{40}^1 & c_{41}^1 & c_{42}^1 & c_{43}^1 & c_{44}^1 & c_{45}^1 \\ c_{50}^1 & c_{51}^1 & c_{52}^1 & c_{53}^1 & c_{54}^1 & c_{55}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{00}^2 & c_{01}^2 & c_{02}^2 & c_{03}^2 & c_{04}^2 & c_{05}^2 \\ c_{10}^2 & c_{11}^2 & c_{12}^2 & c_{13}^2 & c_{14}^2 & c_{15}^2 \\ c_{20}^2 & c_{21}^2 & c_{22}^2 & c_{23}^2 & c_{24}^2 & c_{25}^2 \\ c_{30}^2 & c_{31}^2 & c_{32}^2 & c_{33}^2 & c_{34}^2 & c_{35}^2 \\ c_{40}^2 & c_{41}^2 & c_{42}^2 & c_{43}^2 & c_{44}^2 & c_{45}^2 \\ c_{50}^2 & c_{51}^2 & c_{52}^2 & c_{53}^2 & c_{54}^2 & c_{55}^2 \end{bmatrix}$$

*Ciascun studente calcola*

*"un contributo"*

*dell'intera matrice  $C$ !*

Studente 1

Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

36

## Domanda

Come calcolare  
la matrice  $C$

$$C = C^1 + C^2$$

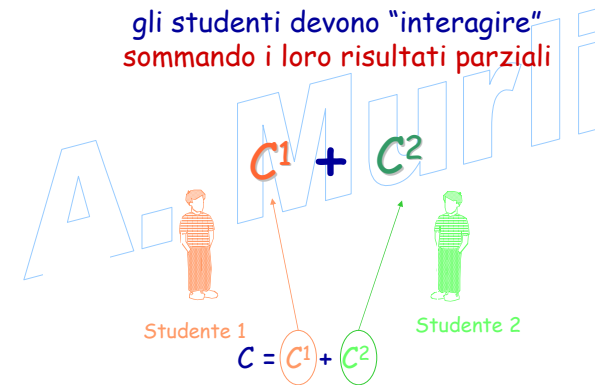
?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

37

## II STRATEGIA: Esempio $n=6$

Per ottenere la matrice  $C$   
gli studenti devono "interagire"  
sommando i loro risultati parziali



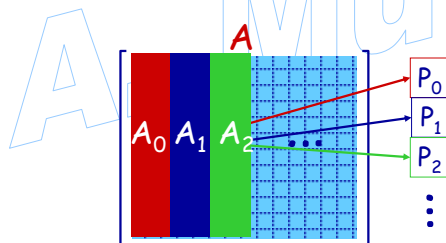
A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

38

## II STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

La matrice  $A$  viene distribuita  
in BLOCCHI di COLONNE  
fra  $p$  processori



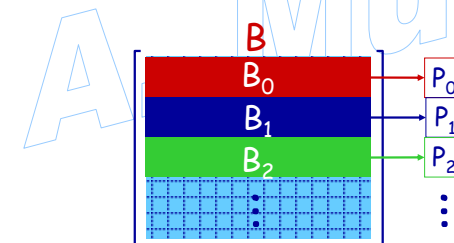
A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

39

## II STRATEGIA: In generale

### I passo: decomposizione del problema

La matrice  $B$  viene distribuita  
in BLOCCHI di RIGHE  
fra  $p$  processori



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

40

## II STRATEGIA: In generale

### II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto  $A \cdot B = C$  viene decomposto  
in  $p$  prodotti del tipo

$$A_i \cdot B_i = C^i \text{ dove } C = \sum_{i=0}^{p-1} C^i$$

Ciascun processore calcola  
un prodotto matrice matrice  
(di dimensione più piccola di quello assegnato).

## Domanda

Qual è  
l'algoritmo parallelo  
della II Strategia  
di decomposizione

?

## Risposta

Partizionamento di  
 $A$  in blocchi di colonne  
 $B$  in blocchi di righe

```
begin
C = 0
for i=0 to p-1 do
   $C^i = A_i \cdot B_i$ 
   $C = C + C^i$ 
endfor
end
```

Distribuzione dei  
blocchi fra i  
processori

Algoritmo parallelo

Parallelizzazione dell'algoritmo a blocchi!

## Risposta

Partizionamento di  
 $A$  in blocchi di colonne  
 $B$  in blocchi di righe

```
begin
C = 0
for i=0 to p-1 do
   $C^i = A_i \cdot B_i$ 
   $C = C + C^i$ 
endfor
end
```

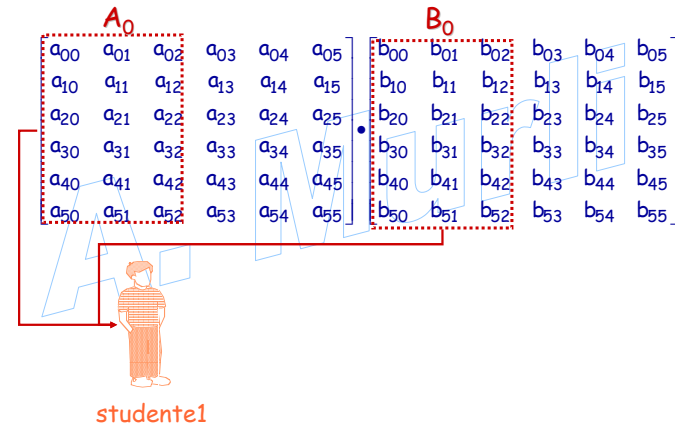
Algoritmo parallelo

```
begin
forall  $P_i$ ,  $i=0, p-1$ 
  {  $P_i$  calcola  $C^i = B_i \cdot A_i$  }
  { combinazione dei  $C^i$  }
   $C = C + C^i$ 
endfor
end
```

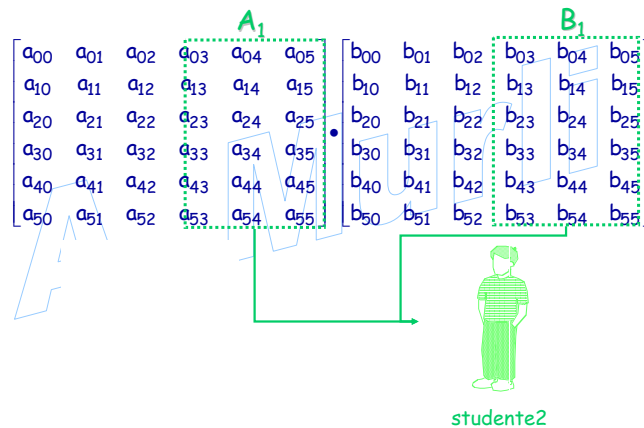
### III strategia

Suddividiamo  
ENTRAMBE  
le matrici A e B in  
blocchi di COLONNE

### Distribuzione dei dati: Esempio n=6



### Distribuzione dei dati: Esempio n=6



### Domanda

Con i dati così distribuiti  
cosa può calcolare  
ciascuno studente

### III Strategia: Esempio n=6

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} = [?]$$

Studente 1

quali componenti della matrice C calcola lo studente 1

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

49

### III Strategia: Esempio n=6

$$\begin{bmatrix} a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} = [?]$$

Studente 2

quali componenti della matrice C calcola lo studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

50

### Premessa...

$$\begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} & c_{04} & c_{05} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{40} & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{50} & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

Riorganizziamo la matrice C in blocchi quadrati

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

51

### Premessa...

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{50} & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} & b_{04} & b_{05} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{40} & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{50} & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

Riorganizziamo la matrice C in blocchi quadrati

Allo stesso modo riorganizziamo i blocchi di colonne di A e B!

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

52

### Osservazione...

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

$A_0$     $A_1$     $B_0$     $B_1$

Riorganizziamo la matrice  $C$  in **blocchi quadrati**

**Allo stesso modo** riorganizziamo  
i blocchi di colonne di  $A$  e  $B$ !

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

53

### Osservazione...

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

$A_0$     $A_1$     $B_0$     $B_1$

*Pertanto...*

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

54

### Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

$A_0$     $B_0$

*Pertanto...*

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$



Lo studente 1  
calcola "un contributo"  
di "una parte" della  
matrice  $C$ !

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

55

### Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

$A_0$     $B_0$

*Pertanto...*

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$



Lo studente 1  
**NON può completare**  
i calcoli  
**perché non possiede**  
gli altri blocchi di  $A$ !

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

56

## Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

$A_1$   $B_1$

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Studente 2

Lo studente 2  
calcola "un contributo"  
di "una parte" della  
matrice C!

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

57

## Fase di calcolo

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

$A_1$   $B_1$

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Studente

Lo studente 2  
NON può completare  
i calcoli  
perché non possiede  
gli altri blocchi di A!

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

58

## Domanda

Come "completare"  
i contributi calcolati

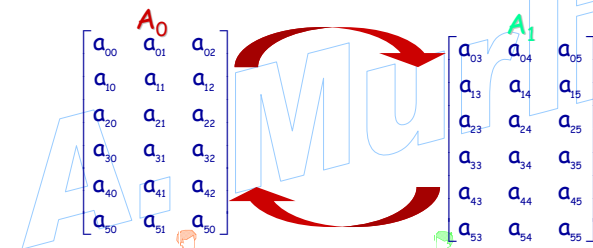
?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

59

## IDEA!

Gli studenti possono scambiarsi  
i blocchi di COLONNE della matrice A!



Studente 1

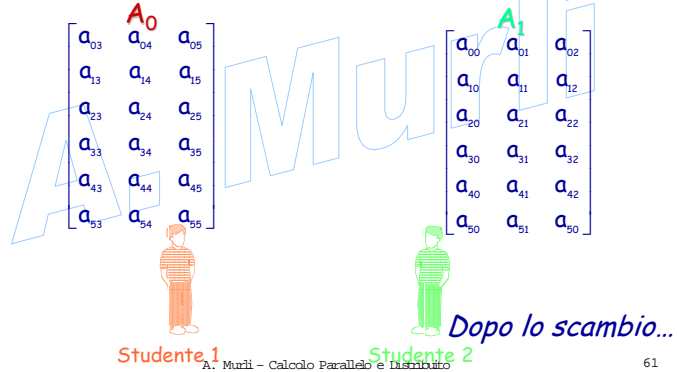
Studente 2

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

60

IDEA!

Gli studenti **possono scambiarsi**  
i blocchi di COLONNE della matrice A!



A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

61

Dopo lo scambio... Fase di calcolo 2

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

Pertanto...

$$\begin{aligned} C_{00} &= A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10} \\ C_{10} &= A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10} \end{aligned}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Lo studente 1  
ha ricevuto  
l'altro blocco di A  
e può completare il  
Calcolo!

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

Dopo lo scambio... Fase di calcolo 2

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} \\ C_{10} & C_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{bmatrix}$$

Pertanto...

$$C_{00} = A_{00} B_{00} + A_{01} B_{10}$$

$$C_{10} = A_{10} B_{00} + A_{11} B_{10}$$

$$C_{01} = A_{00} B_{01} + A_{01} B_{11}$$

$$C_{11} = A_{10} B_{01} + A_{11} B_{11}$$

Studente 2

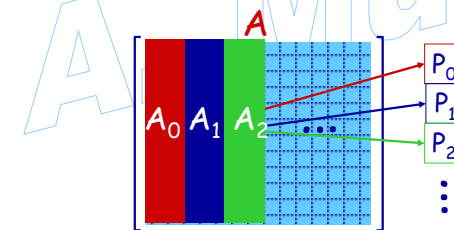
Lo studente 2  
ha ricevuto  
l'altro blocco di A  
e può completare il  
Calcolo!

A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

### III STRATEGIA: In generale

**I passo: decomposizione del problema**

La matrice A viene distribuita  
in BLOCCHI di COLONNE  
fra p processori



A. Muri - Calcolo Parallelo e Distribuito

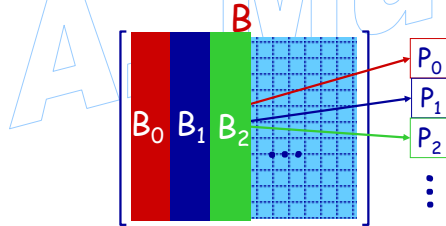
64



### III STRATEGIA: In generale

#### I passo: decomposizione del problema

La matrice **B** viene distribuita  
in BLOCCHI di COLONNE  
fra  $p$  processori



A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

65

### III STRATEGIA: In generale

#### II passo: risoluzione dei sottoproblemi

Il prodotto  $A \cdot B = C$  viene decomposto  
in  $p \times p$  prodotti del tipo

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{p-1} A_{ik} B_{kj}$$

Ciascun processore calcola

$p$  prodotti matrice matrice

(di dimensione più piccola di quello assegnato).

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

66

### Domanda

Qual è l'algoritmo parallelo  
della **III Strategia**  
di decomposizione

?

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

67

### Risposta

Partizionamento delle matrici

**A** e **B** in blocchi di colonne

```
Begin
for i=0 to p-1 do
  for j=0 to p-1 do
     $C_{ij} = 0$ 
    for k=0 to p-1 do
       $C_{ij} = C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$ 
    endfor
  endfor
endfor
end
```

Distribuzione dei  
blocchi fra i  
processori

Algoritmo parallelo

Parallelizzazione  
dell'algoritmo a blocchi!

A. Muzi - Calcolo Parallelo e Distribuito

68

## Risposta

Partizionamento delle matrici

A e B in blocchi di colonne

Algoritmo parallelo

```
Begin
for i=0 to p-1 do
  for j=0 to p-1 do
     $C_{ij} = 0$ 
    for k=0 to p-1 do
       $C_{ij} = C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$ 
    endfor
  endfor
endfor
end
```

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

69

```
Begin
for i =0 to p-1
  for j=0 to p-1 do
    forall  $P_k$ ,  $k=0, p-1$ 
      {  $P_k$  calcola
         $C_{ij} = C_{ij} + A_{ik} \cdot B_{kj}$ 
      }
    endfor
    send( $A_i$ ,  $P_{i+1}$ ) {p+1= 0}
    recv( $A_{i-1}$ ,  $P_{i-1}$ ) {-1= P}
  endfor
```

Fine Lezione.

A. Murli - Calcolo Parallelo e Distribuito

70