

Prodotto matrice per vettore
su un architettura MIMD
a memoria distribuita
e con **Distribuzione Scattered a Blocchi**
dei dati di input

Problema:

Consideriamo:

- la matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- i vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$
- una griglia cartesiana quadrata di dimensione $p \times p$

Distribuiamo:

- la matrice A ed il vettore x usando lo schema Scattered a Blocchi

Distribuzione Scattered a Blocchi



I processori sono logicamente organizzati in una griglia bidimensionale

Esempio: organizzazione di 6 processori in una griglia 2x3

0	$P_{0,0}$	1	$P_{0,1}$	2	$P_{0,2}$
3	$P_{1,0}$	4	$P_{1,1}$	5	$P_{1,2}$

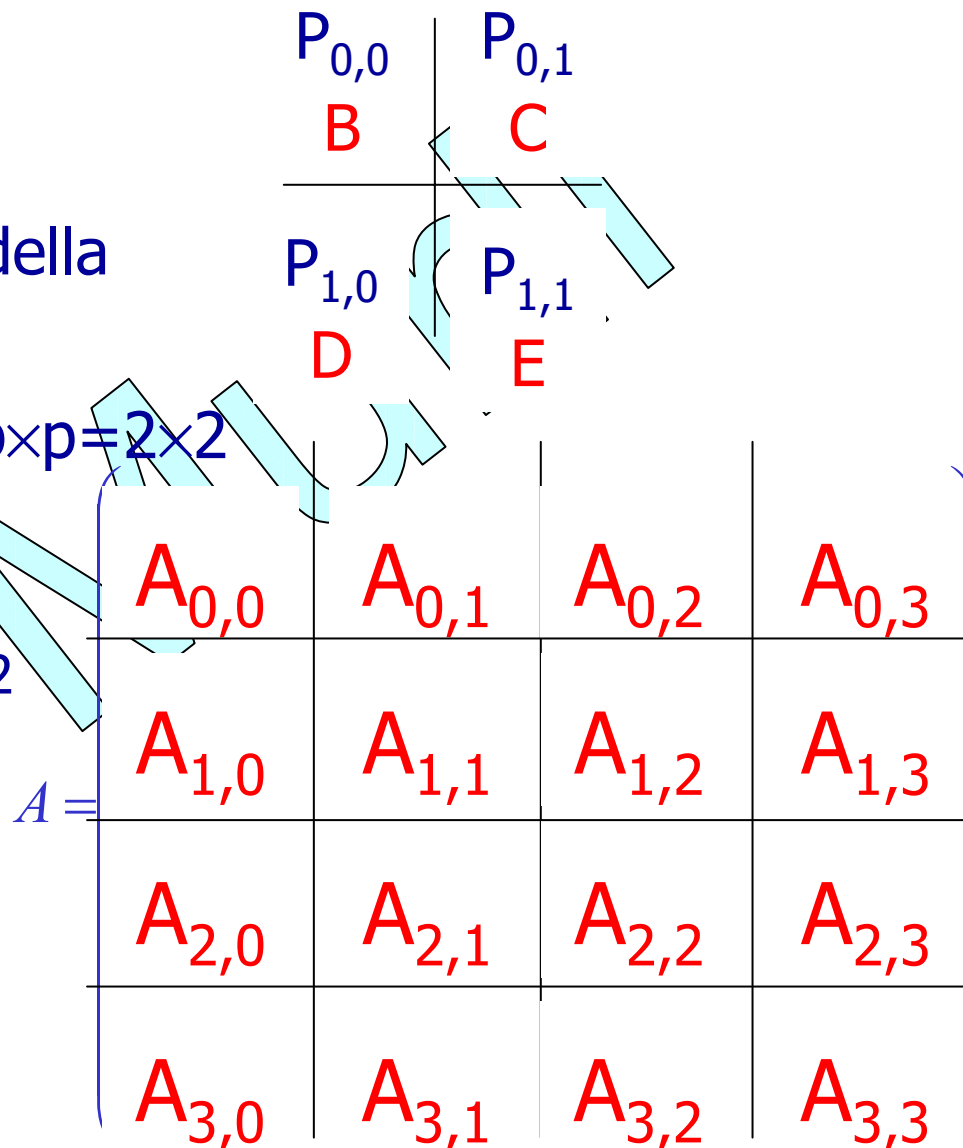
Assegnazione e distribuzione dei dati:

Assegnati:

- la matrice $A \in \mathbb{R}^{8 \times 8}$
- il fattore di blocco $nb=2$ della matrice A
- una griglia di processori $p \times p = 2 \times 2$

Scomponiamo la matrice A
in blocchi di dimensione $nb \times nb = 2 \times 2$
in modo che $A_{ij} \in \mathbb{R}^{nb \times nb}$

Assegniamo una lettera ad ogni
processore per identificare i blocchi
di A che gli appartengono



Assegnazione e distribuzione dei dati:

Distribuiamo i blocchi $A_{i,j}$ della matrice A ciclicamente lungo le righe e lungo le colonne della griglia di processori (schema **Scattered**)

A $P_{0,0}$ assegniamo i blocchi:

$A_{0,0}, A_{0,2}, A_{2,0}, A_{2,2}$

denominiamoli: **B1, B2, B3, B4**

A $P_{0,1}$ assegniamo i blocchi:

$A_{0,1}, A_{0,3}, A_{2,1}, A_{2,3}$

denominiamoli: **C1, C2, C3, C4**

A $P_{1,0}$ assegniamo i blocchi:

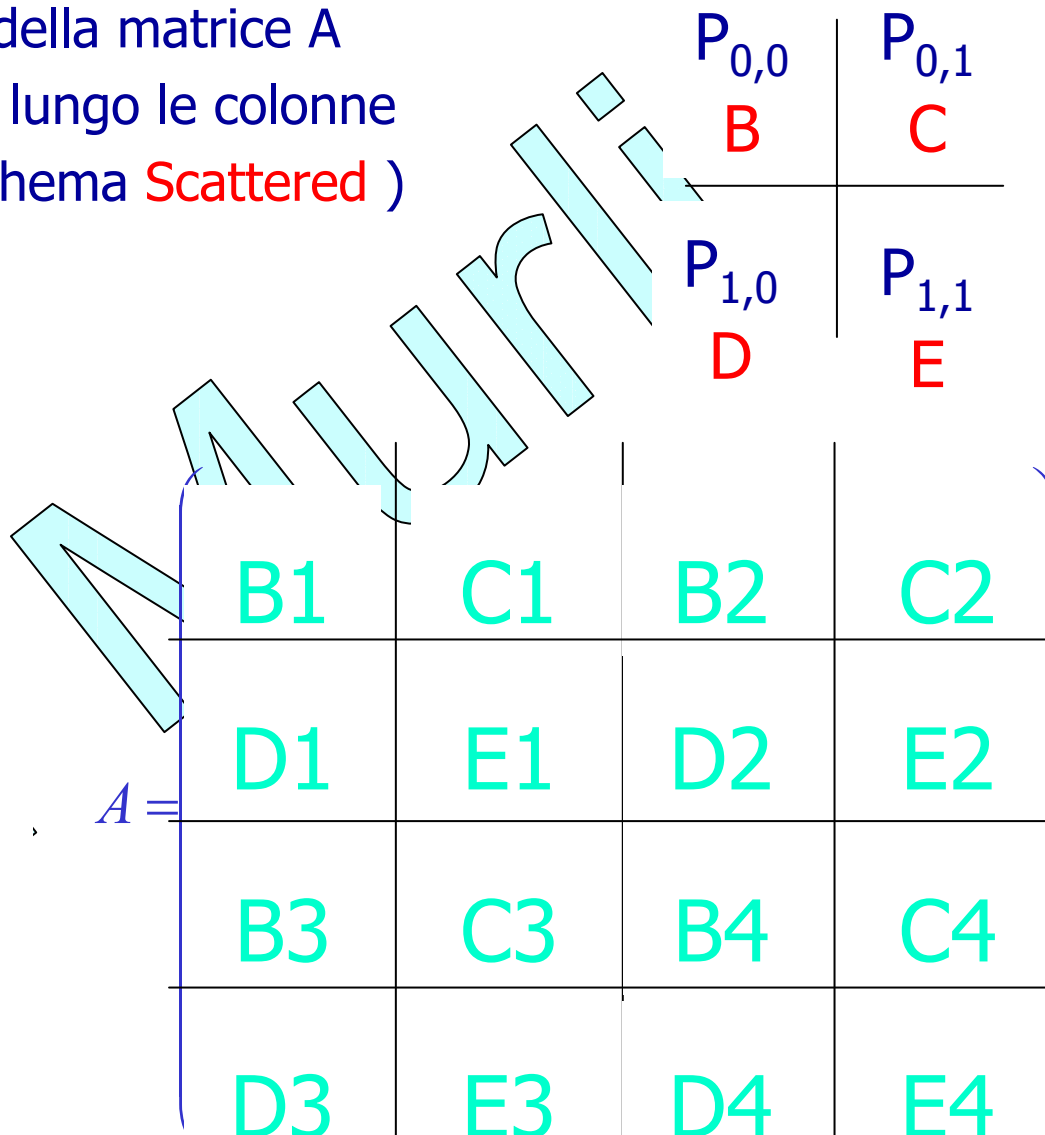
$A_{1,0}, A_{1,2}, A_{3,0}, A_{3,2}$

denominiamoli: **D1, D2, D3, D4**

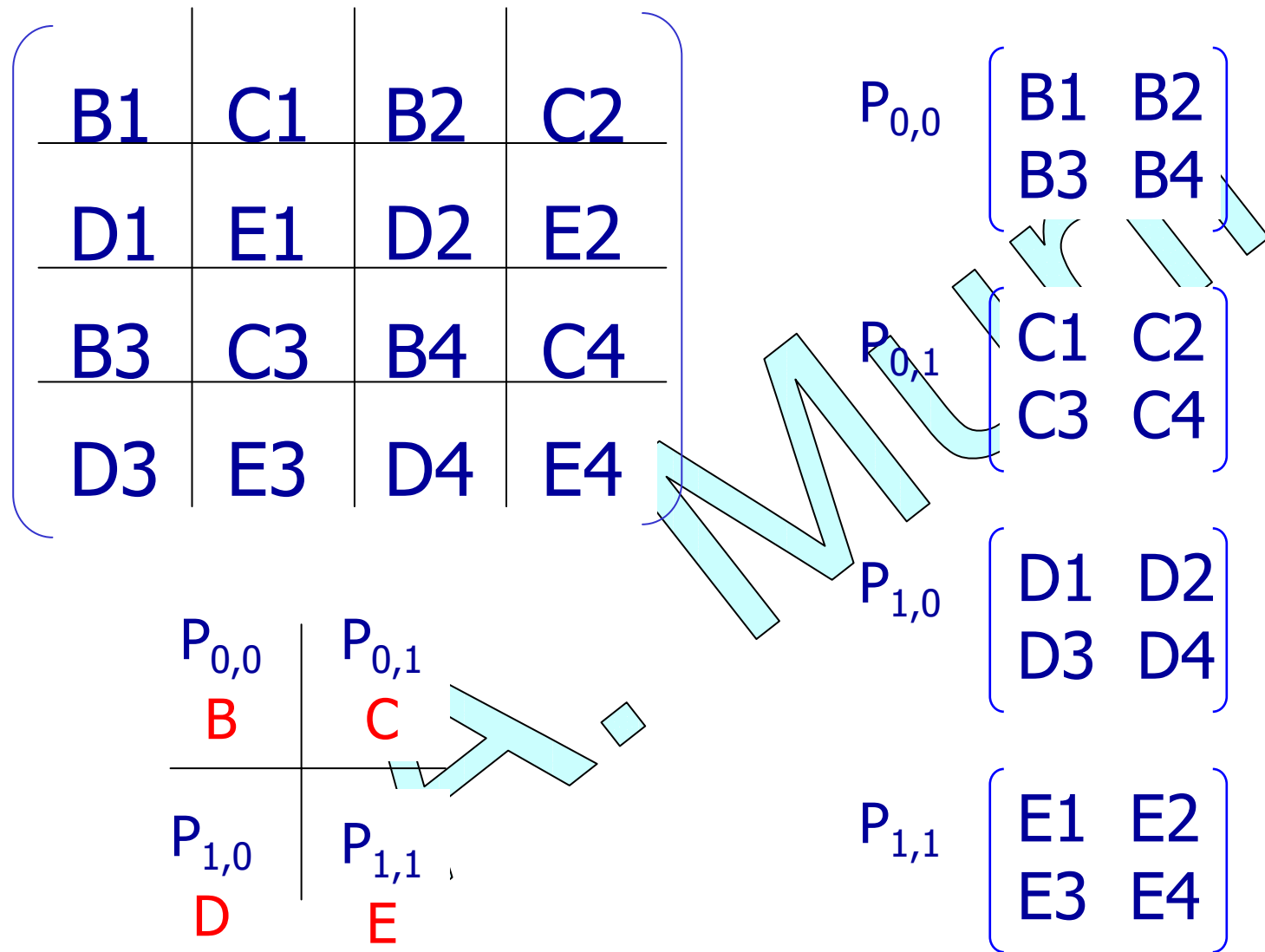
A $P_{1,1}$ assegniamo i blocchi:

$A_{1,1}, A_{1,3}, A_{3,1}, A_{3,3}$

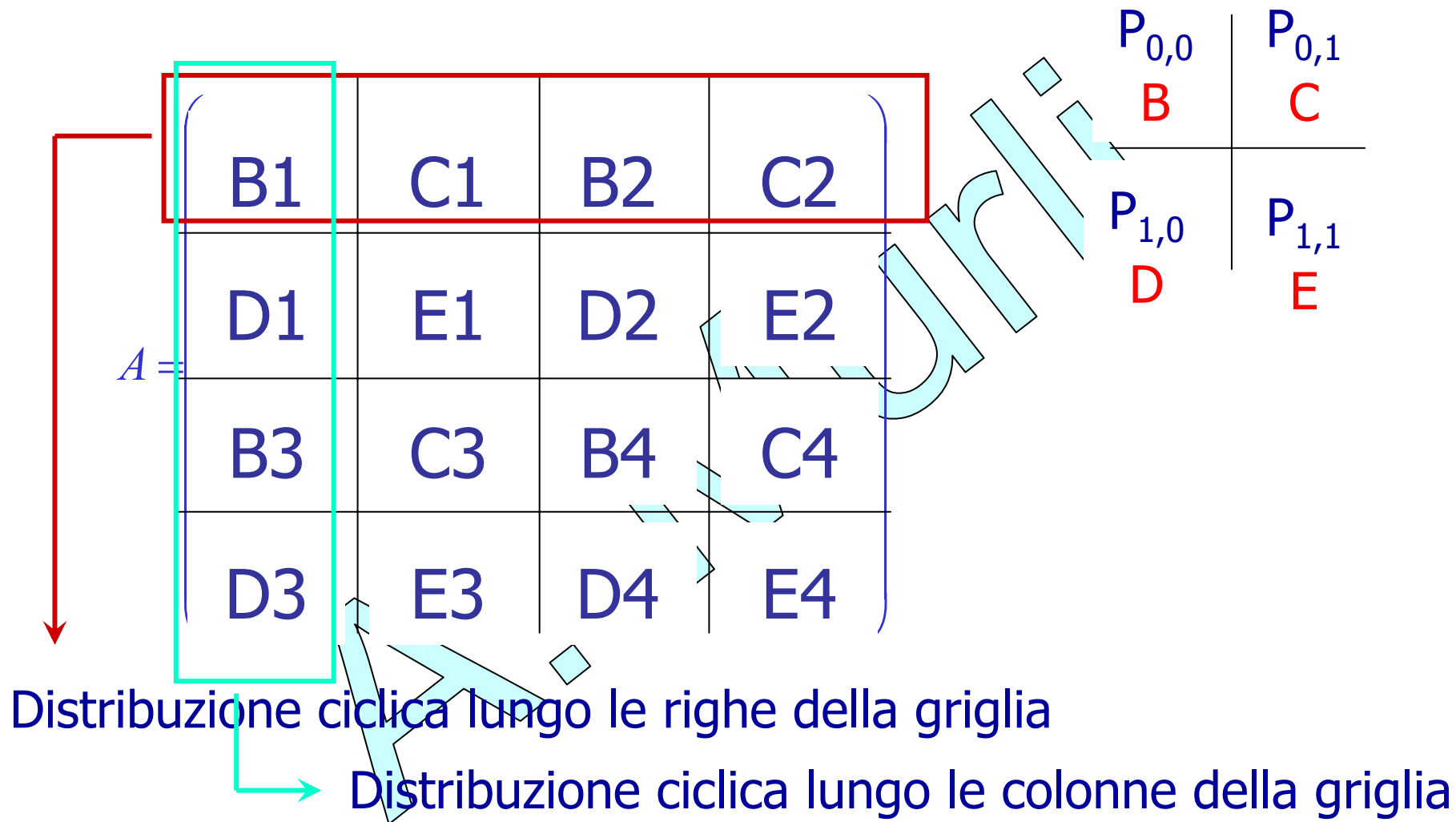
denominiamoli: **E1, E2, E3, E4**



Assegnazione e distribuzione dei dati:



Distribuzione dei dati:



Distribuzione Scattered a Blocchi

La distribuzione scattered a blocchi è caratterizzata da

- ✱ Le dimensioni dei blocchi (fattore di blocco nb)
- ✱ Le dimensioni della griglia dei processi ($p \times q$)

Assegnazione e distribuzione dei dati:

Vogliamo eseguire il prodotto:

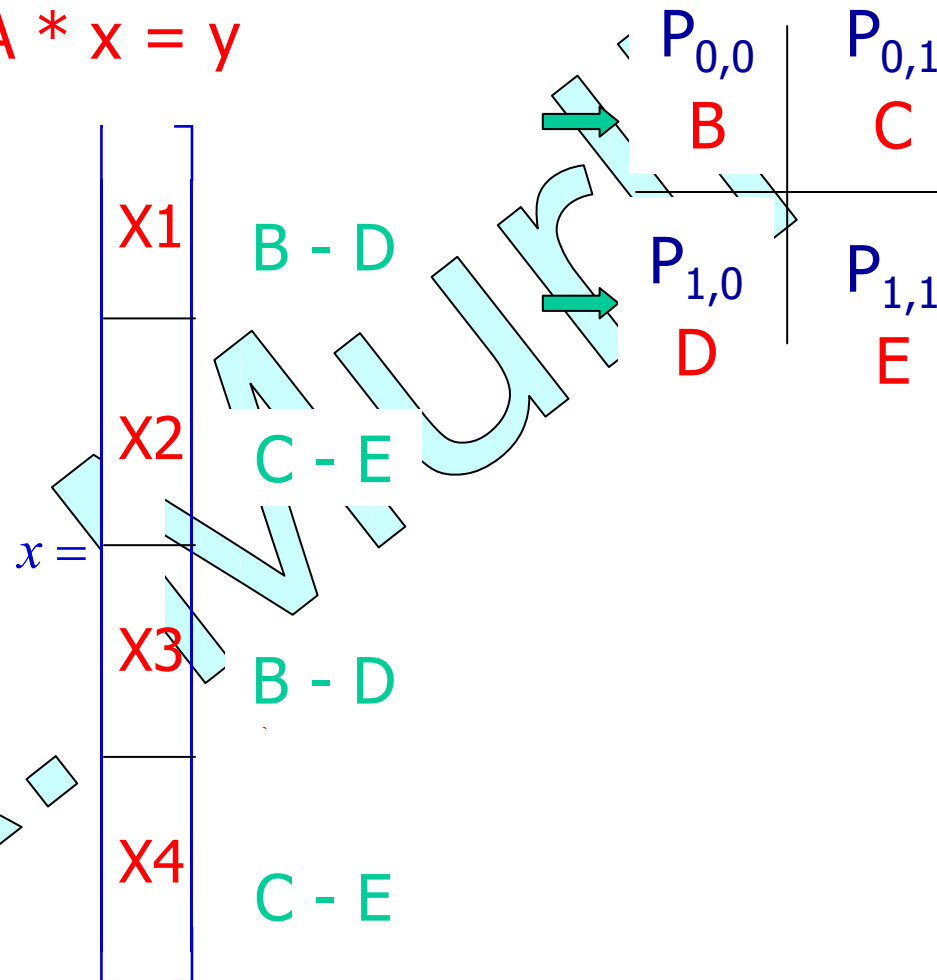
$$A * x = y$$

Assegniamo:

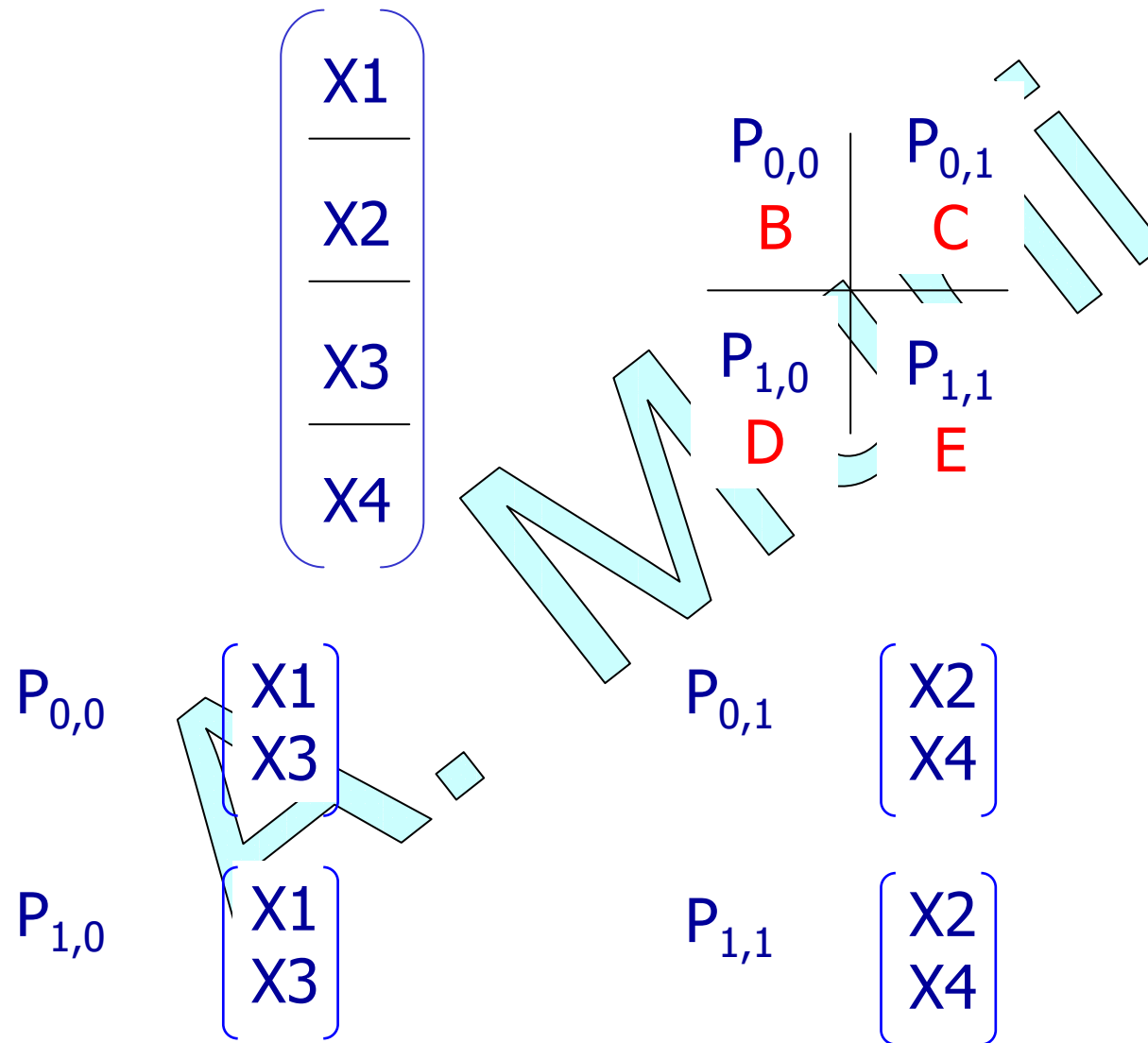
Il vettore $x \in \mathbb{R}^8$

Scomponiamo il vettore
X in blocchi colonna
di dimensione nb=2

Distribuiamo i blocchi
tra i processori usando
lo schema scattered
per ogni riga della griglia



Assegnazione e distribuzione dei dati:

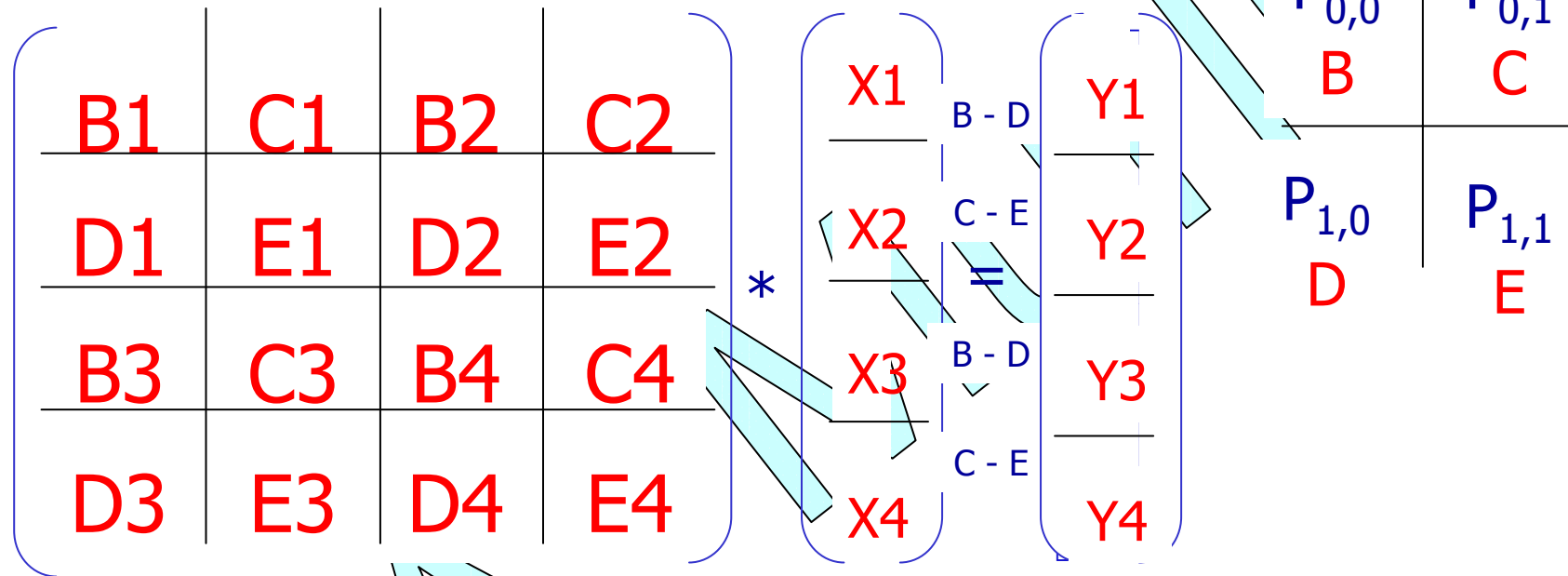


Domanda :

Con i dati così distribuiti
cosa può calcolare ogni processore
della griglia cartesiana?

Calcolo :

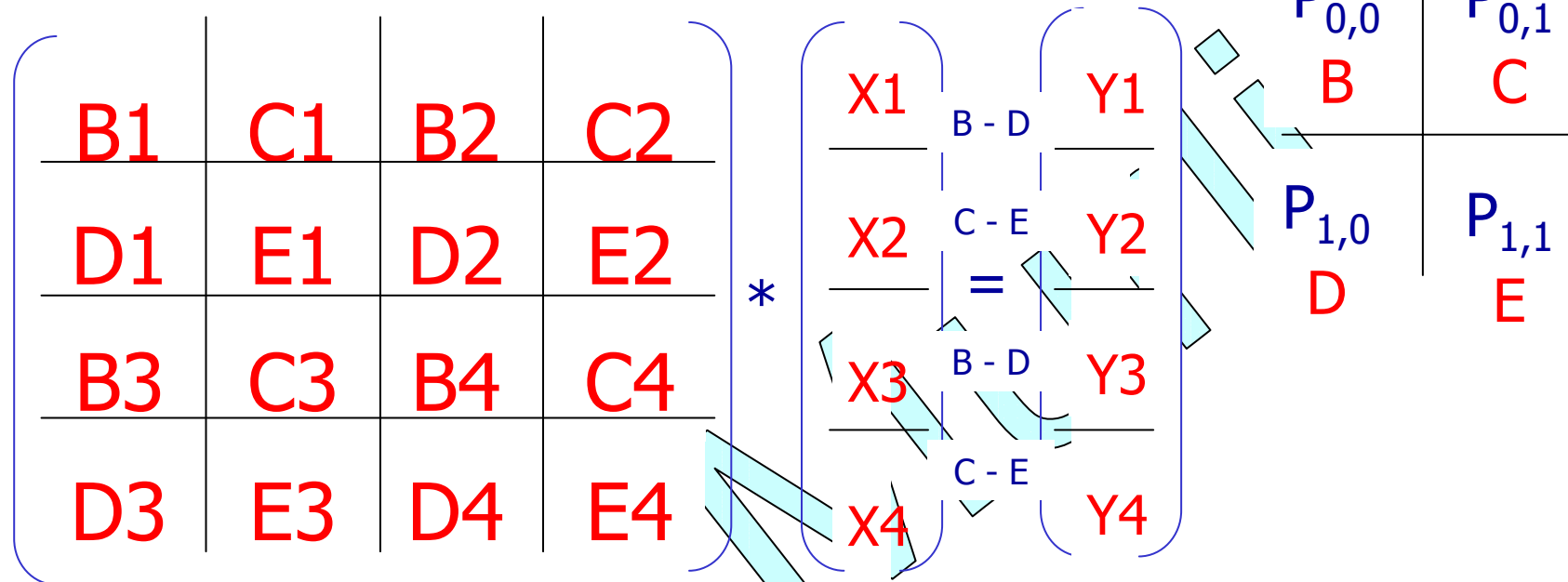
Vogliamo calcolare: sribuiti:



Dividiamo in blocchi di dimensione **nb** anche il vettore Y

Calcolo :

Calcoliamo i blocchi del vettore Y:



$$Y1 = B1 * X1 + C1 * X2 + B2 * X3 + C2 * X4$$

$$Y2 = D1 * X1 + E1 * X2 + D2 * X3 + E2 * X4$$

$$Y3 = B3 * X1 + C3 * X2 + B4 * X3 + C4 * X4$$

$$Y4 = D3 * X1 + E3 * X2 + D4 * X3 + E4 * X4$$

Calcolo :

$$\begin{pmatrix} B1 & C1 & B2 & C2 \\ D1 & E1 & D2 & E2 \\ B3 & C3 & B4 & C4 \\ D3 & E3 & D4 & E4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X1 & B-D & y1 \\ X2 & C-E & y2 \\ X3 & B-D & y3 \\ X4 & C-E & y4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} \\ P_{1,0} & P_{1,1} \end{pmatrix}$$

Diagram illustrating the matrix multiplication process. The first matrix is a 4x4 matrix with elements B1, C1, B2, C2, D1, E1, D2, E2, B3, C3, B4, C4, D3, E3, D4, E4. The second matrix is a 4x2 matrix with elements X1, X2, X3, X4 and y1, y2, y3, y4. The result is a 4x2 matrix with elements P_{0,0}, P_{0,1}, P_{1,0}, P_{1,1}. Arrows indicate the mapping of elements from the first matrix to the second matrix and the resulting elements in the result matrix.

$$Y1 = B1 * X1 + C1 * X2 + B2 * X3 + C2 * X4$$

$$Y1 = BX1 + CX1$$

$$Y2 = D1 * X1 + E1 * X2 + D2 * X3 + E2 * X4$$

$$Y2 = DX1 + EX1$$

$$Y3 = B3 * X1 + C3 * X2 + B4 * X3 + C4 * X4$$

$$Y3 = BX2 + CX2$$

$$Y4 = D3 * X1 + E3 * X2 + D4 * X3 + E4 * X4$$

$$Y4 = DX2 + EX2$$

A. Murli

Calcolo e Comunicazione:

$$Y1 = B1 * X1 + C1 * X2 + B2 * X3 + C2 * X4$$

$$Y1 = BX1 + CX1$$

$$Y3 = B3 * X1 + C3 * X2 + B4 * X3 + C4 * X4$$

$$Y3 = BX2 + CX2$$

Calcolo in parallelo delle componenti parziali del vettore Y

$$P_{0,0} \begin{bmatrix} B1 & B2 \\ B3 & B4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BX1 \\ BX2 \end{bmatrix} \quad P_{0,1} \begin{bmatrix} C1 & C2 \\ C3 & C4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X2 \\ X4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CX1 \\ CX2 \end{bmatrix}$$

Comunicazioni per ottenere le componenti del vettore Y

$$P_{0,0} \begin{bmatrix} BX1 \\ BX2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} CX1 \\ CX2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y1 \\ Y3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} CX1 \\ CX2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BX1 \\ BX2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y1 \\ Y3 \end{bmatrix}^{P_{0,1}}$$

Calcolo e Comunicazione:

$$Y2 = \boxed{D1 * X1 + D2 * X3} + \boxed{E1 * X2 + E2 * X4}$$

$$Y2 = \text{DX1} + \text{EX1}$$

$$Y4 = \boxed{D3 * X1 + D4 * X3} + \boxed{E3 * X2 + E4 * X4}$$

$$Y4 = \text{DX2} + \text{EX2}$$

Calcolo in parallelo delle componenti parziali del vettore Y

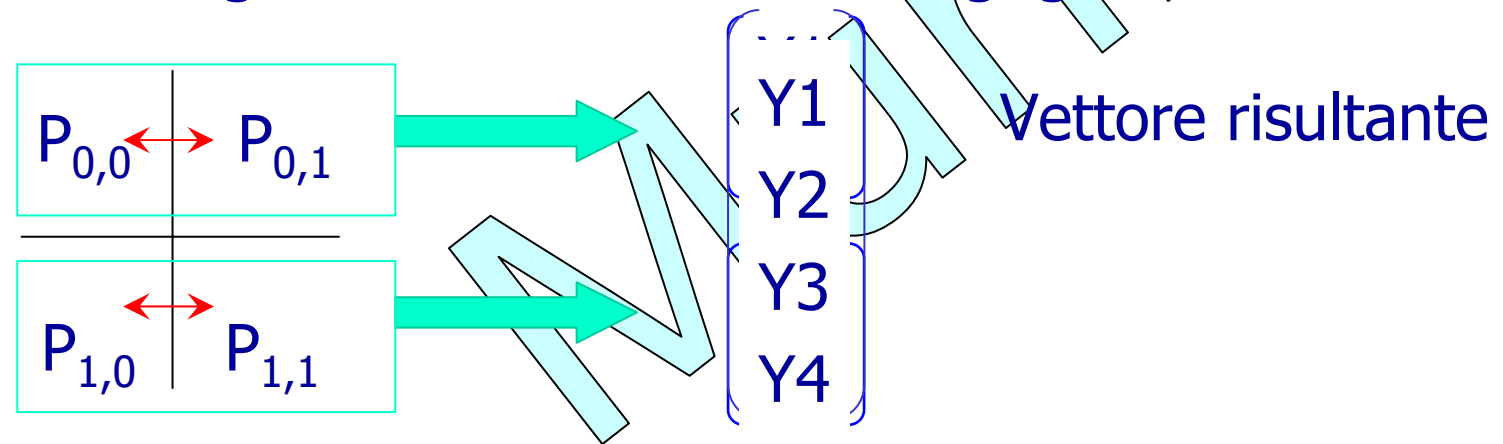
$$P_{1,0} \begin{bmatrix} D1 & D2 \\ D3 & D4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ X3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{DX1} \\ \text{DX2} \end{bmatrix} \quad P_{1,1} \begin{bmatrix} E1 & E2 \\ E3 & E4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X2 \\ X4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{EX1} \\ \text{EX2} \end{bmatrix}$$

Comunicazioni per ottenere le componenti del vettore Y

$$P_{1,0} \begin{bmatrix} \text{DX1} \\ \text{DX2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{EX1} \\ \text{EX2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y2 \\ Y4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{communication}} \begin{bmatrix} \text{EX1} \\ \text{EX2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{DX1} \\ \text{DX2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y2 \\ Y4 \end{bmatrix}^{P_{1,1}}$$

Comunicazioni :

Dopo opportune comunicazioni tra i processori appartenenti alla stessa riga della griglia si hanno le componenti del vettore Y distribuite lungo ciascuna colonna della griglia



Si possono quindi effettuare comunicazioni lungo le colonne della griglia per ottenere l'intero vettore risultante

Considerazioni :

1. La matrice A non deve essere necessariamente quadrata

Assegnando $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
e fissando la dimensione di blocco nb
otteniamo un numero diverso di blocchi
lungo le colonne e le righe di A

Numero di blocchi lungo le righe: $s = n/nb$

Numero di blocchi lungo le colonne: $r = m/nb$

Considerazioni :

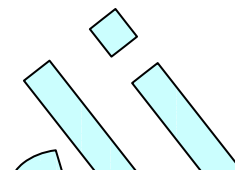
2. La griglia cartesiana non deve essere necessariamente quadrata. La si può considerare anche di dimensione $p \times q$

L'utilizzo di una griglia quadrata può risultare utile, ad esempio, quando la matrice A è essa stessa rettangolare, in quanto può migliorare il bilanciamento del carico di lavoro tra i processori.

A .

Distribuzione Scattered a Blocchi

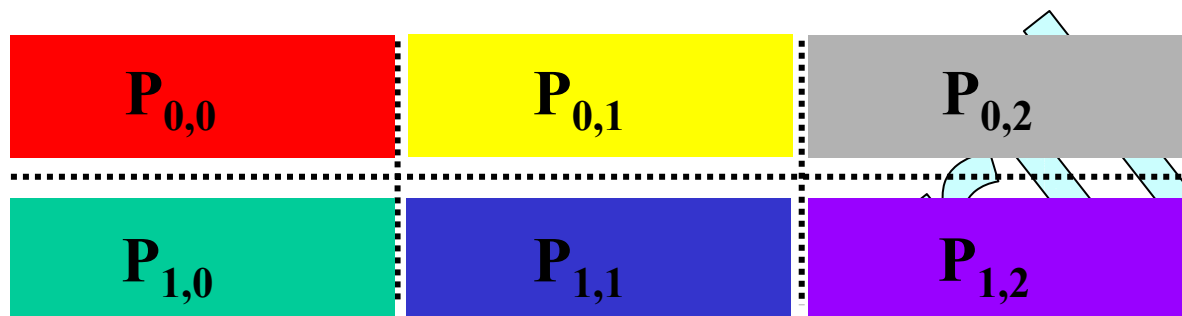
Esempio: Decomponiamo la matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$
in 6x8 blocchi $A_{ij} \in \mathbb{R}^{nb \times nb}$



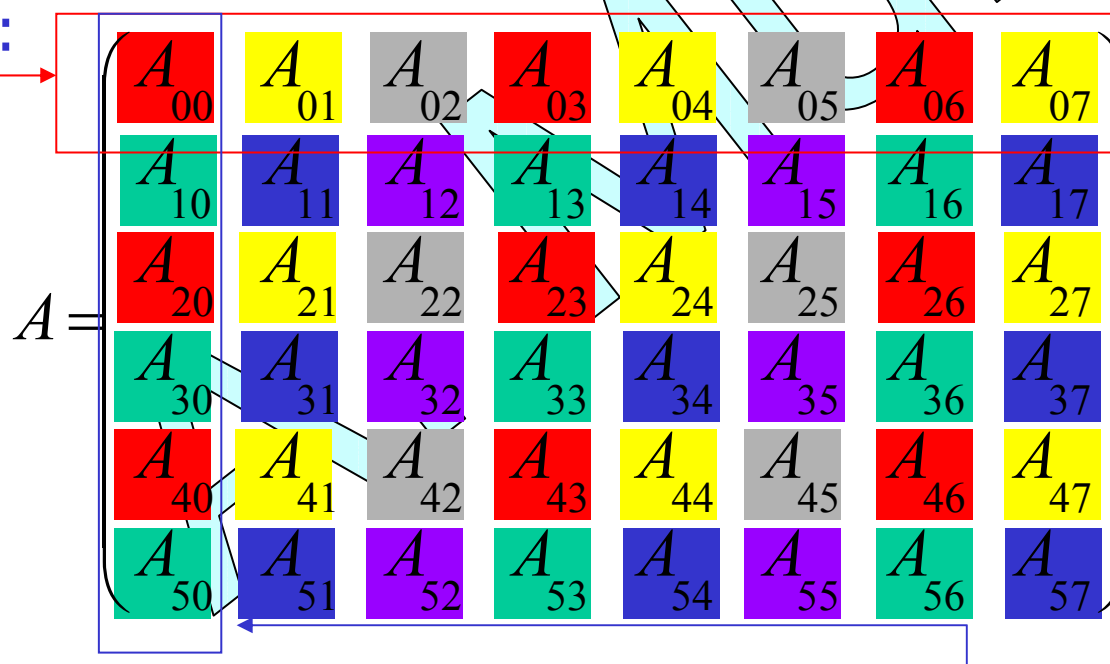
$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} & A_{04} & A_{05} & A_{06} & A_{07} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} \\ A_{30} & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} \\ A_{40} & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} \\ A_{50} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} \end{pmatrix}$$

Distribuzione Scattered a Blocchi

Identifichiamo i processori attraverso colori differenti:



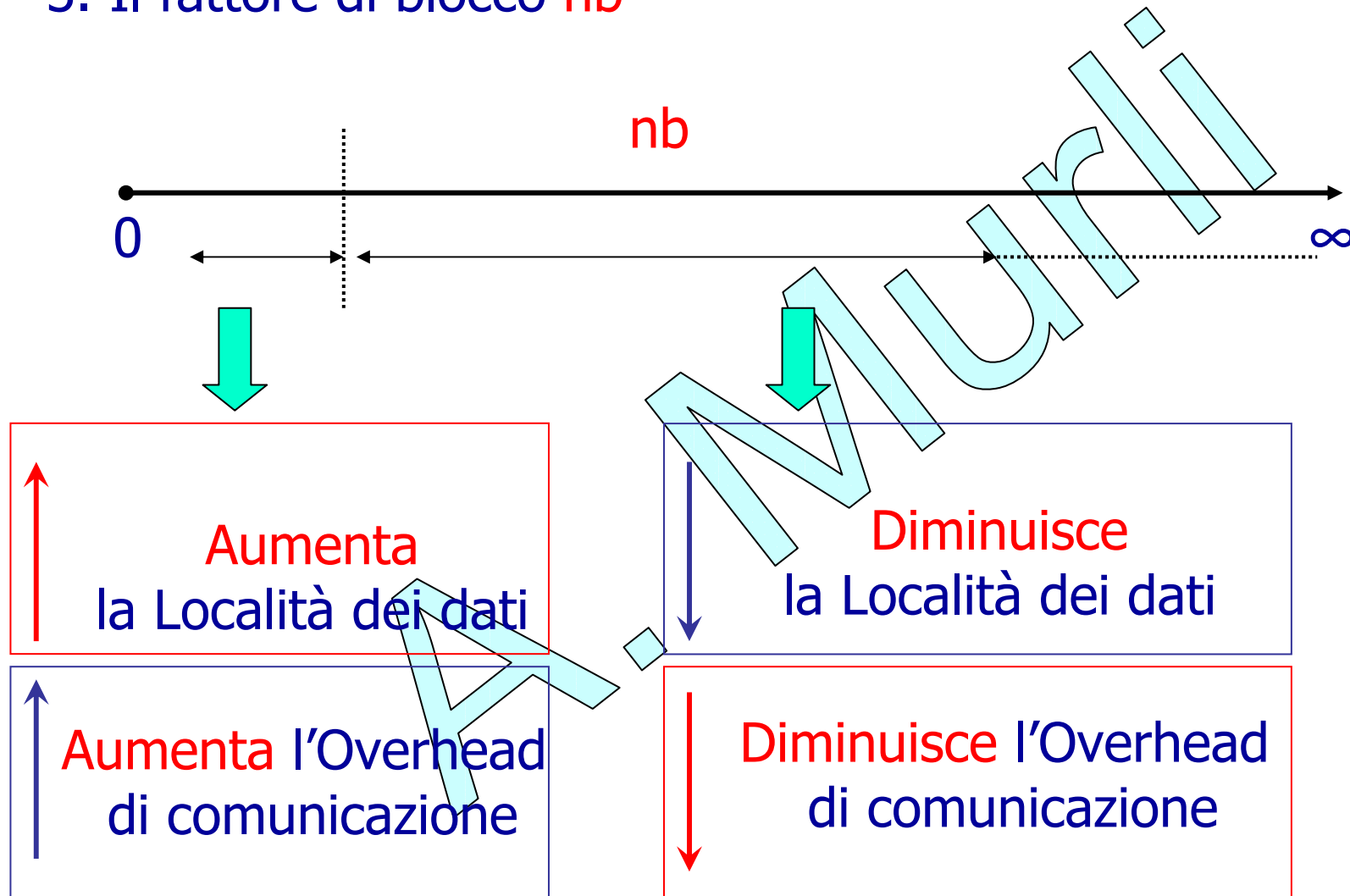
Otteniamo:



$C \in$ Distribuzione ciclica lur Distribuzione ciclica lungo le colonne

Considerazioni :

3. Il fattore di blocco nb



A. Murli

Fine!