Esercitazione del 9/12/04 per il corso di Calcolo Parallelo e Distribuito
Anno Accademico 2004/2005
Prof. Luisa D'Amore

Punti trattati nell'esercitazione del 20/01/04:

1. Ordinamento sequenziale di una lista *bitonica* di lunghezza $n = 8$;
2. Ordinamento sequenziale di una generica lista utilizzando come strategia di ordinamento il **B**itonic **S**ort (BS);
3. Ordinamento parallelo di una generica lista utilizzando P processori e come strategia di ordinamento il **P**arallel **B**itonic **S**ort (PBS).

1. **Ordinamento sequenziale di una lista *bitonica*.**

   Si è considerata la seguente lista bitonica di lunghezza $n = 8 = 2^3$:

   2 4 6 8 9 7 5 3

   Essendo $n = 2^3$ occorrono 3 passi per ordinarla.

Passo 1 Si considera la sequenza bitonica di lunghezza 8 e si mettono in relazione gli elementi a distanza 4. Si formano cosí le coppie (a_i, A_i) in cui $a_i = min(a_i, A_i)$, mentre $A_i = max(a_i, A_i)$, per $i = 1, \ldots, 4$, (Co-Ex-Lo):

$$\begin{array}{cccccccccc} 2 & 4 & 6 & 8 & \vdots & 9 & 7 & 5 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \vdots & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza:

$$2 \quad 4 \quad 5 \quad 3 \quad \vdots \quad 9 \quad 7 \quad 6 \quad 8$$

Passo 2 Si considerano le due sottosequenze bitoniche di lunghezza 4 costruite al passo precedente e, in ciascuna, si mettono in relazione gli elementi a distanza 2. Si formano cosí nella prima sequenza bitonica le coppie (a_i, A_i) in cui $a_i = min(a_i, A_i)$, mentre $A_i = max(a_i, A_i)$, per $i = 1, \ldots, 2$, (Co-Ex-Lo), nella seconda sequenza bitonica le coppie (b_i, B_i) in cui $b_i = min(b_i, B_i)$, mentre $B_i = max(b_i, B_i)$, per

$i = 1, \ldots, 2$, $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$:

$$\begin{array}{cccccc|cccccc} 2 & 4 & \vdots & 5 & 3 & & 9 & 7 & \vdots & 6 & 8 \\ a_1 & a_2 & \vdots & A_1 & A_2 & & b_1 & b_2 & \vdots & B_1 & B_2 \end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 3 & \vdots & 5 & 4 & 6 & 7 & \vdots & 9 & 8 \end{array}$$

Passo 3 Si considerano le 4 sottosequenze bitoniche di lunghezza 2 costruite al passo precedente. Si costruiscono cosí le coppie :

- (a_1, A_1) in cui $a_1 = min(a_1, A_1)$, mentre $A_1 = max(a_1, A_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (b_1, B_1) in cui $b_1 = min(b_1, B_1)$, mentre $B_1 = max(b_1, B_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (c_1, C_1) in cui $c_1 = min(c_1, C_1)$, mentre $C_1 = max(c_1, C_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (d_1, D_1) in cui $d_1 = min(d_1, D_1)$, mentre $D_1 = max(d_1, D_1)$ (*Co-Ex-Lo*).

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 \\ a_1 & A_1 & b_1 & B_1 & c_1 & C_1 & d_1 & D_1 \end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza globalmente ordinata:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

2. **Ordinamento sequenziale di una *generica* lista utilizzando come strategia di ordinamento il *B*itonic *S*ort (BS).**

Ordinare una generica sequenza utilizzando il **BS** consta di due passi:

a) Rendere bitonica la sequenza;

b) Ordinare la sequenza bitonica.

Essendo la sequenza di lunghezza $n = 8 = 2^3$ si devono effettuare 3 passi, di cui 2 per realizzare il punto a) e l'utlimo per il punto b). Ad ogni passo i si dovranno eseguire dei sottopassi j; indichiamo, quindi, il generico passo (i, j), con $i = 1, \ldots, 3$ e $j = i - 1, \ldots, 0$.

Si è considerata la seguente lista $n = 8 = 2^3$:
6 3 9 8 1 5 4 2

Passo 1 Si considerano 4 sequenza di lunghezza 2 in modo da rendere le coppie contigue delle sequenze bitoniche di lunghezza 4. Per tale operazione è necessario un solo passo:

Passo (1,0) Si sono considerate le seguenti sequenze bitoniche:

- (a_1, A_1) in cui $a_1 = min(a_1, A_1)$, mentre $A_1 = max(a_1, A_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (B_1, b_1) in cui $b_1 = min(b_1, B_1)$, mentre $B_1 = max(b_1, B_1)$ (*Co-Ex-Hi*);
- (c_1, C_1) in cui $c_1 = min(c_1, C_1)$, mentre $C_1 = max(c_1, C_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (D_1, d_1) in cui $d_1 = min(d_1, D_1)$, mentre $D_1 = max(d_1, D_1)$ (*Co-Ex-Hi*).

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 6 & 3 & 9 & 8 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ a_1 & A_1 & B_1 & b_1 & c_1 & C_1 & D_1 & d_1 \end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 3 & 6 & 9 & 8 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{array}$$

che può essere vista come due sequeze bitoniche di lunghezza 4:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} 3 & 6 & \vdots & 9 & 8 & 1 & 5 & \vdots & 4 & 2 \\ & \text{sequenza} & & \text{bitonica} & & & \text{sequenza} & & \text{bitonica} & \end{array}$$

Passo 2 Si considerano le due sequenze bitoniche costruite al passo precedente e le si ordinano rispettivamente in ordine crescente (*Co-Ex-Lo*) e decrescente (*Co-Ex-Hi*), in modo da ottenere globalmente una sequenza bitonica. Per ordinare una sequenza bitonica di lunghezza $4 = 2^2$ occorrono 2 passi, si ha quindi ($i = 2$, $j = 0, 1$):

Passo (2,1) Si considerano le due sottosequenze bitoniche di lunghezza 4 e, in ciascuna, si mettono in relazione gli elementi a distanza 2. Si formano cosí nella prima sequenza bitonica le coppie (a_i, A_i) in cui $a_i = min(a_i, A_i)$, mentre $A_i = max(a_i, A_i)$, per $i = 1, \ldots, 2$, (*Co-Ex-Lo*), nella seconda sequenza bitonica le coppie (B_i, b_i) in cui $b_i = min(b_i, B_i)$, mentre $B_i = max(b_i, B_i)$, per $i = 1, \ldots, 2$, (*Co-Ex-Hi*) :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 6 & \vdots\ 9 & 8 & 1 & 5 & \vdots\ 4 & 2 \\ a_1 & a_2 & \vdots\ A_1 & A_2 & B_1 & B_2 & \vdots\ b_1 & b_2 \end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & \vdots\ 9\ \ 8 & 4 & 5 & \vdots\ 1\ \ 2 \end{array}$$

Passo (2,0) Si considerano le 4 sottosequenze bitoniche di lunghezza 2 costruite al passo precedente. Si costruiscono cosí le coppie :

- (a_1, A_1) in cui $a_1 = min(a_1, A_1)$, mentre $A_1 = max(a_1, A_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (b_1, B_1) in cui $b_1 = min(b_1, B_1)$, mentre $B_1 = max(b_1, B_1)$ (*Co-Ex-Lo*);
- (C_1, c_1) in cui $c_1 = min(c_1, C_1)$, mentre $C_1 = max(c_1, C_1)$ (*Co-Ex-Hi*);
- (D_1, d_1) in cui $d_1 = min(d_1, D_1)$, mentre $D_1 = max(d_1, D_1)$ (*Co-Ex-Hi*).

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 3 & 6 & 9 & 8 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ a_1 & A_1 & b_1 & B_1 & C_1 & c_1 & D_1 & d_1 \end{array}$$

Si ottengono cosí le nuove sottosequenze ordinate, e la sequenza assegnata è globalmente bitonica:

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 6 & 8 & 9 & \vdots\ 5 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

sequenza bitonica

Passo 3 Non resta che ordinare la sequenza bitonica di lunghezza $n = 8 = 2^3$ secondo quanto illustrato al Punto **1.** ($i = 3$,$j = 2, 1, 0$).

Passo (3,2) Si considera la sequenza bitonica di lunghezza 8 e si mettono in relazione gli elementi a distanza 4. Si formano cosí le coppie (a_i, A_i) in cui $a_i = min(a_i, A_i)$, mentre $A_i = max(a_i, A_i)$, per $i = 1, \ldots, 4$, (*Co-Ex-Lo*):

$$\begin{array}{cccc c cccc} 3 & 6 & 8 & 9 & \vdots & 5 & 4 & 2 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \vdots & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza:

$$3 \quad 4 \quad 2 \quad 1 \;\; \vdots \;\; 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9$$

Passo (3,1) Si considerano le due sottosequenze bitoniche di lunghezza 4 costruite al passo precedente e, in ciascuna, si mettono in relazione gli elementi a distanza 2. Si formano cosí nella prima sequenza bitonica le coppie (a_i, A_i) in cui $a_i = min(a_i, A_i)$, mentre $A_i = max(a_i, A_i)$, per $i = 1, \ldots, 2$, $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$, nella seconda sequenza bitonica le coppie (b_i, B_i) in cui $b_i = min(b_i, B_i)$, mentre $B_i = max(b_i, B_i)$, per $i = 1, \ldots, 2$, $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$:

$$\begin{array}{cccccc|cccccc}
3 & 4 & \vdots & 2 & 1 & & 5 & 6 & \vdots & 8 & 9 \\
a_1 & a_2 & \vdots & A_1 & A_2 & & b_1 & b_2 & \vdots & B_1 & B_2
\end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
2 & 1 & \vdots & 3 & 4 & 5 & 6 & \vdots & 8 & 9
\end{array}$$

Passo (3,0) Si considerano le 4 sottosequenze bitoniche di lunghezza 2 costruite al passo precedente. Si costruiscono cosí le coppie :

* (a_1, A_1) in cui $a_1 = min(a_1, A_1)$, mentre $A_1 = max(a_1, A_1)$ $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$;
* (b_1, B_1) in cui $b_1 = min(b_1, B_1)$, mentre $B_1 = max(b_1, B_1)$ $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$;
* (c_1, C_1) in cui $c_1 = min(c_1, C_1)$, mentre $C_1 = max(c_1, C_1)$ $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$;
* (d_1, D_1) in cui $d_1 = min(d_1, D_1)$, mentre $D_1 = max(d_1, D_1)$ $(Co\text{-}Ex\text{-}Lo)$.

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 \\
a_1 & A_1 & b_1 & B_1 & c_1 & C_1 & d_1 & D_1
\end{array}$$

Si ottiene cosí la nuova sequenza globalmente ordinata:

$$\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9
\end{array}$$

3. **Ordinamento parallelo di una generica lista utilizzando P processori e come strategia di ordinamento il Parallel Bitonic Sort (PBS).**

Si sono considerati tre casi:

Caso I Ordinamento di una lista di $n = 8$ elementi distribuita tra $p = 2$ processori;

Caso II Ordinamento di una lista di $n = 16$ elementi distribuita tra $p = 4$ processori;

Caso III Ordinamento di una lista di $n = 32$ elementi distribuita tra $p = 8$ processori.

Analizziamo in dettaglio ciscun caso.

Caso I Ordinamento di una lista di $n = 8$ elementi distribuita tra $p = 2$ processori.

Si è considerata la seguente lista:

7 10 1 3 5 11 6 4

Si è, poi, distribuita tra i 2 processori, P_0 e P_1:

P_0	P_1
7	5
10	11
1	6
3	4

Ogni processore procede poi all'ordinamento della sua sottolista:

P_0	P_1
1	4
3	5
7	6
10	11

I due processori devono quindi comunicare per ordinare globalnete la lista. Il processore P_0 spedisce il suo ultimo elemento (a) a P_1 e P_1 il suo primo elemento (b) a P_0; entrambi verificano se $a > b$ nel qual caso P_0 inserisce l'elemento b nella sua sottolista e P_1 l'elemento a nella propria sottolista, mantenendole globalmente ordinate. Questi passi sono eseguiti fino a quando la relazione di disuguagianza stretta $(a > b)$ è verificata.

Analizziamo cosa accade nella nostra lista:

- **Passo 1** P_0 spedisce 10 a P_1; P_1 spedisce 4 a P_0.

P_0		P_1
1	$\leftarrow$	4
3		5
7		6
10	$\rightarrow$	11

  Essendo vero che $10 > 4$ si procede al loro inserimento nelle sottoliste.

P_0	P_1
1	5
3	6
4	10
7	11

- **Passo 2** P_0 spedisce 7 a P_1; P_1 spedisce 5 a P_0.

P_0		P_1
1	$\leftarrow$	5
3		6
4		10
7	$\rightarrow$	11

Essendo vero che $7 > 5$ si procede al loro inserimento nelle sottoliste.

P_0	P_1
1	6
3	7
4	10
5	11

– **Passo 3** P_0 spedisce 5 a P_1; P_1 spedisce 6 a P_0.

P_0		P_1
1	$\leftarrow$	6
3		7
4		10
5	$\rightarrow$	11

Essendo non vero che $5 > 6$ gli elementi non sono inseriti e termina l'esecuzione.

La lista distribuita tra i due processori risulta globalmente ordinata. Il processore P_0 applica ai suoi dati la *Co-Ex-Lo*, mentre P_1 la *Co-Ex-Hi*.

Caso II Ordinamento di una lista di $n = 16$ elementi distribuita tra $p = 4 = 2^2$ processori.
Dobbiamo eseguire 2 passi, ognuno dei quali ammette dei sottopassi,

e lo schema di comunicazioni coincide con quello visto nell'ordinamento di una generica sequenza di lunghezza 4. Supponiamo di aver già distribuito gli elementi ai 4 processori e che ciascuno abbia ordinato la propria sottolista. Indichiamo con L e con H rispettivamente l'applicazione della Co-Ex-Lo e della Co-Ex-Hi. Ad ogni passo si individuano coppie di processori che applicano nell'ordine (L,H) oppure (H,L). Al passo (i, j), applicano la L quei processori tali che:

$$i_{bit} = j_{bit} \;\; con \;\; i = 1, \ldots, 2 \;\; e \;\; j = i - 1, \ldots, 0$$

dove i_{bit} e j_{bit} rappresentano rispettivamente il valore dell'i-esimo e del j-esimo bit dell'identificativo del processore P_k, per $k = 0, \ldots, 3$. In caso contrario il Processore P_k applica la H.

Abbiamo quindi:

P_0	P_1	P_2	P_3
6	2	1	8
10	4	3	9
11	12	5	13
16	15	7	14

- **Passo 1** Abbiamo $i = 1$ e $j = 0$, quindi :

Passo(1,0) Per $i = 1$ e $j = 0$ si ha che:

· Comunicano (P_0, P_1) ed applicano (L,H);

· Comunicano (P_2, P_3) ed applicano (H,L).

Graficamente abbiamo:

P_0	P_1	P_2	P_3
000	001	010	011
L	H	H	L
6	2	1	8
10	4	3	9
11	12	5	13
16	15	7	14

E le liste aggirnate sono:

P_0	P_1	P_2	P_3
2	11	8	1
4	12	9	3
6	15	13	5
10	16	14	7

– **Passo 2** Abbiamo $i = 2$ e $j = 1, 0$, quindi abbiamo due sotto-passi.

Passo (2,1) Per $i = 2$ e $j = 1$ si ha che:

- Comunicano (P_0, P_2) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_1, P_3) ed applicano (L,H).

Graficamente abbiamo:

P_0	P_1	P_2	P_3
000	001	010	011
L	H	H	L
2	11	8	1
4	12	9	3
6	15	13	5
10	16	14	7

E si ottiene:

P_0	P_1	P_2	P_3
2	1	9	11
4	3	10	12
6	5	13	15
8	7	14	16

Passo (2,0) Per $i = 2$ e $j = 0$ si ha che :

- Comunicano (P_0, P_1) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_2, P_3) ed applicano (L,H).

P_0	P_1	P_2	P_3
000	001	010	011
L	H	L	H
2	1	9	11
4	3	10	12
6	5	13	15
8	7	14	16

E cosí si ottiene la lista globalmente ordinata:

P_0	P_1	P_2	P_3
1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Caso III Ordinamento di una lista di $n = 32$ elementi distribuita tra $p = 8 = 2^3$ processori.

Dobbiamo eseguire 3 passi ognuno dei quali ammette dei sottopassi, e lo schema di comunicazioni coincide con quello visto nell'ordinamento di una generica sequenza di lunghezza 8. Supponiamo di aver già distribuito gli elementi agli 8 processori e che ciascuno abbia ordinato la propria sottolista. Indichiamo, anche in questo esempio, con L e con H rispettivamente l'applicazione della Co-Ex-Lo e della Co-Ex-Hi. Ad ogni passo si individuano coppie di processori che applicano nell'ordine (L,H) oppure (H,L). Al passo (i, j), applicano la L quei processori tali che:

$$i_{bit} = j_{bit} \ \ con \ \ i = 1, \ldots, 3 \ \ e \ \ j = i - 1, \ldots, 0$$

dove i_{bit} e j_{bit} rappresentano rispettivamente il valore dell'i-esimo e del j-esimo bit dell'identificativo del processore P_k, per $k = 0, \ldots, 3$. In caso contrario il processore P_k applica la H.

Abbiamo quindi:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
7	6	3	1	4	2	5	8
10	11	7	13	14	15	16	17
30	27	12	18	19	20	22	23
21	32	26	24	25	28	29	31

- **Passo 1** Abbiamo $i = 1$ e $j = 0$, quindi un unico passo.

Passo(1,0) Per $i = 1$ e $j = 0$ si ha che:

- Comunicano (P_0, P_1) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_2, P_3) ed applicano (H,L);
- Comunicano (P_4, P_5) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_6, P_7) ed applicano (H,L).

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
L	H	H	L	L	H	H	L
7	6	3	1	4	2	5	8
10	11	9	13	14	15	16	17
30	27	12	18	19	20	22	23
21	32	26	24	25	28	29	31

Si ha cosí la seguente lista aggiornata:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
6	21	13	1	2	19	22	5
7	27	18	3	4	20	23	8
10	30	24	9	14	25	29	16
11	32	26	12	15	28	31	17

– **Passo 2** Abbiamo $i = 2$ e $j = 1, 0$, quindi ci sono due sottopassi.

Passo (2,1) Per $i = 2$ e $j = 1$ si ha che:

- Comunicano (P_0, P_2) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_1, P_3) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_4, P_6) ed applicano (H,L);
- Comunicano (P_5, P_7) ed applicano (H,L).

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
L	L	H	H	H	H	L	L
6	21	13	1	2	19	22	5
7	27	18	3	4	20	23	8
10	30	24	9	14	25	29	16
11	32	26	12	15	28	31	17

Si ha cosí la seguente lista aggiornata:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
6	1	13	21	22	19	2	5
7	3	18	27	23	20	4	8
10	9	24	30	29	25	14	16
11	12	26	32	31	28	15	17

Passo (2,0) Per $i = 2$ e $j = 0$ si ha che:

- Comunicano (P_0, P_1) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_2, P_3) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_4, P_5) ed applicano (H,L);
- Comunicano (P_6, P_7) ed applicano (H,L).

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
L	H	L	H	H	L	H	L
6	1	13	21	22	19	2	5
7	3	18	27	23	20	4	8
10	9	24	30	29	25	14	16
11	12	26	32	31	28	15	17

Si ha cosí la seguente lista aggiornata:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	9	13	26	25	19	14	2
3	10	18	27	28	20	15	4
6	11	21	30	29	22	16	5
7	12	24	32	31	23	17	8

La sequenza così distribuita tra gli 8 processori è globalmente bitonica. L'utlimo passo corrisponde all'ordinamento di una lista bitonica.

– **Passo 3** Abbiamo $i = 3$ e $j = 2, 1, 0$.

Passo (3,2) Abbiamo $i = 3$ e $j = 2$, quindi :

· Comunicano (P_0, P_4) ed applicano (L,H);

· Comunicano (P_1, P_5) ed applicano (L,H);

· Comunicano (P_2, P_6) ed applicano (L,H);

· Comunicano (P_3, P_7) ed applicano (L,H).

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
L	L	L	L	H	H	H	H
1	9	13	26	25	19	14	2
3	10	18	27	28	20	15	4
6	11	21	30	29	22	16	5
7	12	24	32	31	23	17	8

Si ha cosí la seguente lista aggiornata:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	9	13	2	25	19	17	26
3	10	14	4	28	20	18	27
6	11	15	5	29	22	21	30
7	12	16	8	31	23	24	32

Passo (3,1) Abbiamo $i = 3$ e $j = 1$, quindi :

- Comunicano (P_0, P_2) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_1, P_3) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_4, P_6) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_5, P_7) ed applicano (L,H).

P_0 0000 L	P_1 0001 L	P_2 0010 H	P_3 0011 H	P_4 0100 L	P_5 0101 L	P_6 0110 H	P_7 0111 H
1	9	13	2	25	19	17	26
3	10	14	4	28	20	18	27
6	11	15	5	29	22	21	30
7	12	16	8	31	23	24	32

Si ha cosí la seguente lista aggiornata:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	2	13	9	17	19	25	26
3	4	14	10	18	20	28	27
6	5	15	11	21	22	29	30
7	8	16	12	24	23	31	32

Passo (3,0) Abbiamo $i = 3$ e $j = 0$, quindi :

- Comunicano (P_0, P_1) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_2, P_3) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_4, P_5) ed applicano (L,H);
- Comunicano (P_6, P_7) ed applicano (L,H).

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
L	H	L	H	L	H	L	H
1	2	13	9	17	19	25	26
3	4	14	10	18	20	28	27
6	5	15	11	21	22	29	30
7	8	16	12	24	23	31	32

Si ha cosí la seguente lista aggiornata:

P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	5	9	13	17	21	25	29
2	6	10	14	18	22	26	30
3	7	11	15	19	23	27	31
4	8	11	16	20	24	28	32

La lista ottenuta risulta globalmente ordinata.

Da questi esempi si è ricavato lo schema in Fig. 1 per l'algoritmo parallelo del PBS eseguibile con $p = 2^m$ processori.

```
procedure PBS
begin
    % Distribuzione degli elementi della lista tra p = 2^m processori
    % Ordinamento di ciscuna sottolista
    for i = 1 to m do
     ibit:=[i-esimo bit di menum];
      for j = i − 1 to 0 do
       jbit:=[j-esimo bit di menum];
       r:=menum%(2^(j+1)) ;
       if (r < 2^j) then
         proc := menum + 2^j;
       else
         proc := menum − 2^j;
       endif
       if(ibit ≠ jbit) then
          Co-Ex-Hi(...) ;
       else
          Co-Ex-Lo(...) ;
       endif
      endfor
     endfor
    return
end
```

Figura 1: *Schema dell'algoritmo parallelo per l'ordinamento di una generica lista con il metodo PBS e ditribuita tra $p = 2^m$ processori.*