

Calcolo Parallelo e Distribuito

A. Murli
a.a. 2004-2005

Problema ...

Progettare un algoritmo **parallelo**
per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari
con matrice **triangolare** su un calcolatore MIMD
a Memoria Distribuita con p processori

Problema ...

Sistemi triangolari

Sistemi triangolari
inferiori

$$\begin{cases} a_{00} x_0 = b_0 \\ a_{10} x_0 + a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$



Forward Substitution

$$(x_0, x_1, x_2)$$

Sistemi triangolari
superiori

$$\begin{cases} a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 = b_0 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$



Backward Substitution

$$(x_2, x_1, x_0)$$

Sistemi triangolari inferiori ...

$$\begin{cases} a_{00} x_0 & = b_0 \\ a_{10} x_0 + a_{11} x_1 & = b_1 \\ a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n & = b_n \end{cases}$$

Forward Substitution

$$\begin{cases} x_0 = b_0 / a_{00} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j \right) / a_{ii} \end{cases}$$

$$\forall i = 1, \dots, n$$

Murli

Sistemi triangolari inferiori ...

$$\begin{cases} a_{00} x_0 & = b_0 \\ a_{10} x_0 + a_{11} x_1 & = b_1 \\ a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n0} x_0 + a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n & = b_n \end{cases}$$

□ Procedendo per righe
il valore di ogni componente
del vettore soluzione
dipende
da quello delle precedenti

Sistemi triangolari inferiori ...

La dipendenza tra le componenti
è la stessa di quella di una **pipeline**

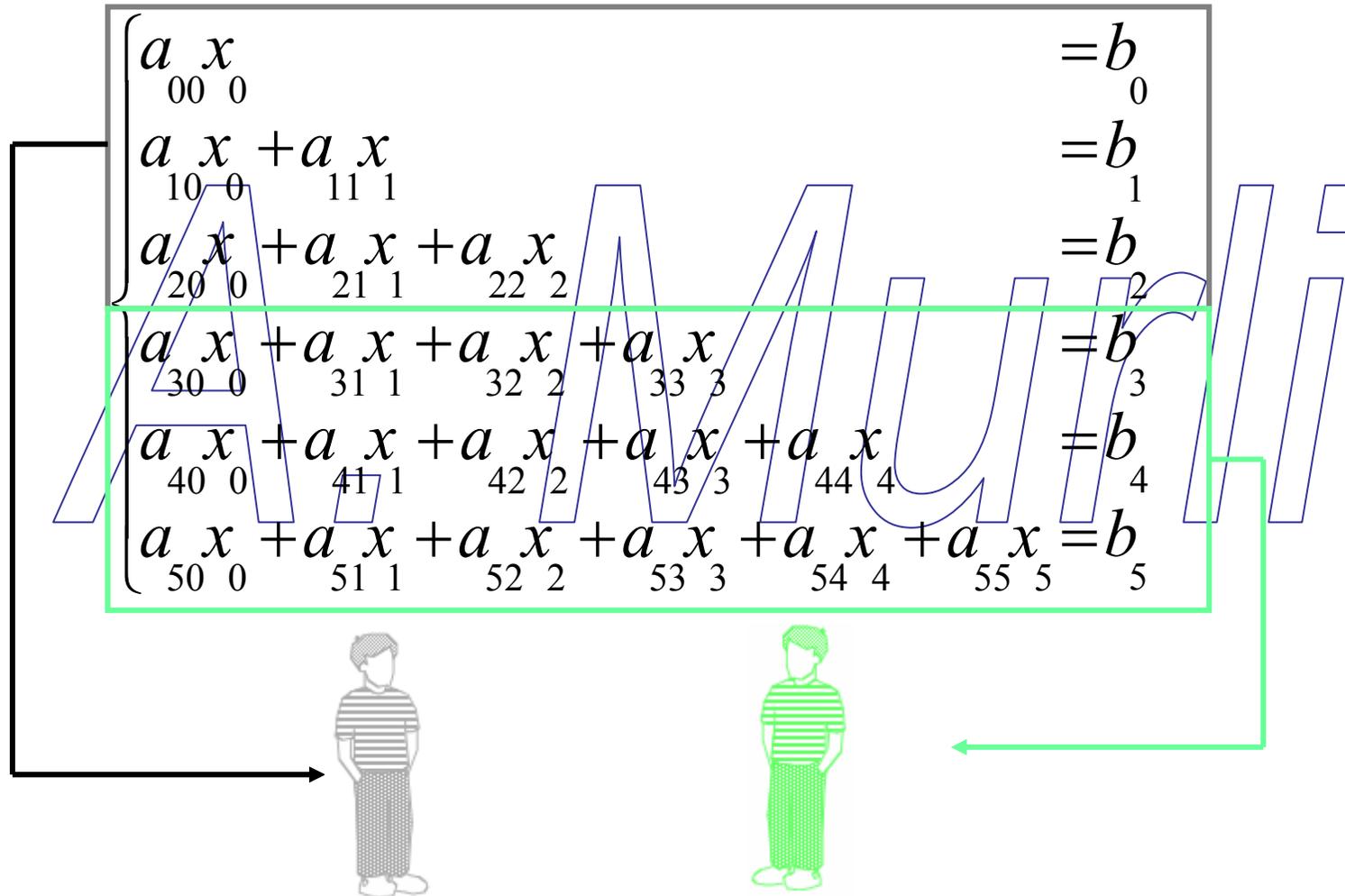
A. Murli

DOMANDA

Come e dove introdurre il parallelismo?

I Strategia : Distribuzione dei dati per righe ...

Consideriamo un sistema di dimensione $n=6$ e 2 Studenti

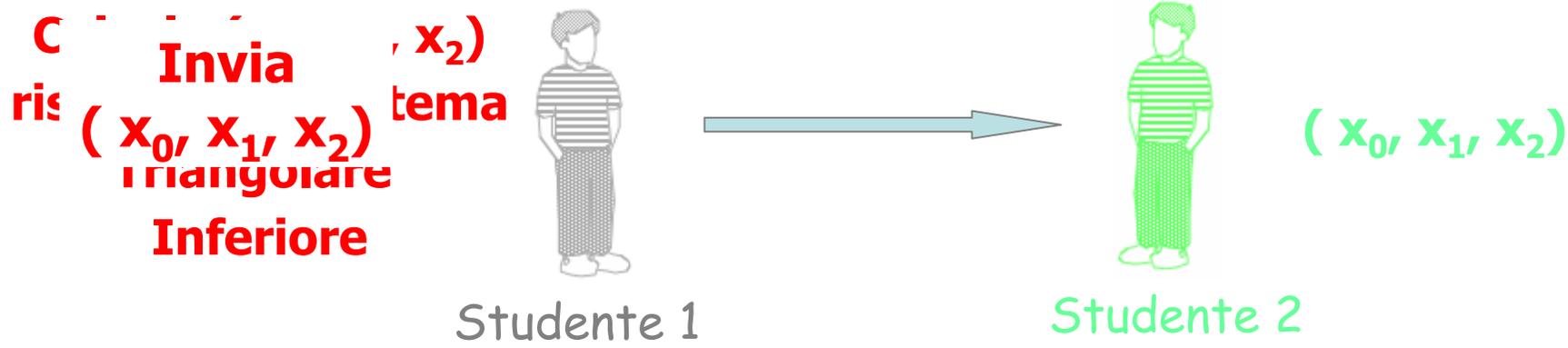


Calcolo Parallelo e Distribuzione dei dati per righe Studente 1

Studente 2

Passo 1 → Studente 1: calcolo+spedizione a Studente 2

$$\begin{cases}
 a_{00} x_0 = b_0 \\
 a_{10} x_0 + a_{11} x_1 = b_1 \\
 a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \\
 a_{30} x_0 + a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 = b_3 \\
 a_{40} x_0 + a_{41} x_1 + a_{42} x_2 + a_{43} x_3 + a_{44} x_4 = b_4 \\
 a_{50} x_0 + a_{51} x_1 + a_{52} x_2 + a_{53} x_3 + a_{54} x_4 + a_{55} x_5 = b_5
 \end{cases}$$



Passo 1 → Studente 2: aggiornamento dati

$$\begin{cases}
 a_{30\ 0} x_0 + a_{31\ 1} x_1 + a_{32\ 2} x_2 + a_{33\ 3} x_3 = b_3 \\
 a_{40\ 0} x_0 + a_{41\ 1} x_1 + a_{42\ 2} x_2 + a_{43\ 3} x_3 + a_{44\ 4} x_4 = b_4 \\
 a_{50\ 0} x_0 + a_{51\ 1} x_1 + a_{52\ 2} x_2 + a_{53\ 3} x_3 + a_{54\ 4} x_4 + a_{55\ 5} x_5 = b_5
 \end{cases}$$

Aggiorna il termine noto (b_1, b_2, b_3) utilizzando (x_0, x_1, x_2) :

$$\begin{cases}
 a_{33\ 3} x_3 = b_3 - (a_{30\ 0} x_0 + a_{31\ 1} x_1 + a_{32\ 2} x_2) \\
 a_{43\ 3} x_3 + a_{44\ 4} x_4 = b_4 - (a_{40\ 0} x_0 + a_{41\ 1} x_1 + a_{42\ 2} x_2) \\
 a_{53\ 3} x_3 + a_{54\ 4} x_4 + a_{55\ 5} x_5 = b_5 - (a_{50\ 0} x_0 + a_{51\ 1} x_1 + a_{52\ 2} x_2)
 \end{cases}$$



Studente 2

Passo 2 → Studente 2: calcolo

$$\begin{cases} a_{33} x_3 & = b_3 - (a_{30} x_0 + a_{31} x_1 + a_{32} x_2) = \tilde{b}_3 \\ a_{43} x_3 + a_{44} x_4 & = b_4 - (a_{40} x_0 + a_{41} x_1 + a_{42} x_2) = \tilde{b}_4 \\ a_{53} x_3 + a_{54} x_4 + a_{55} x_5 & = b_5 - (a_{50} x_0 + a_{51} x_1 + a_{52} x_2) = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

A M U R L I

Calcola le componenti

(x_3, x_4, x_5)

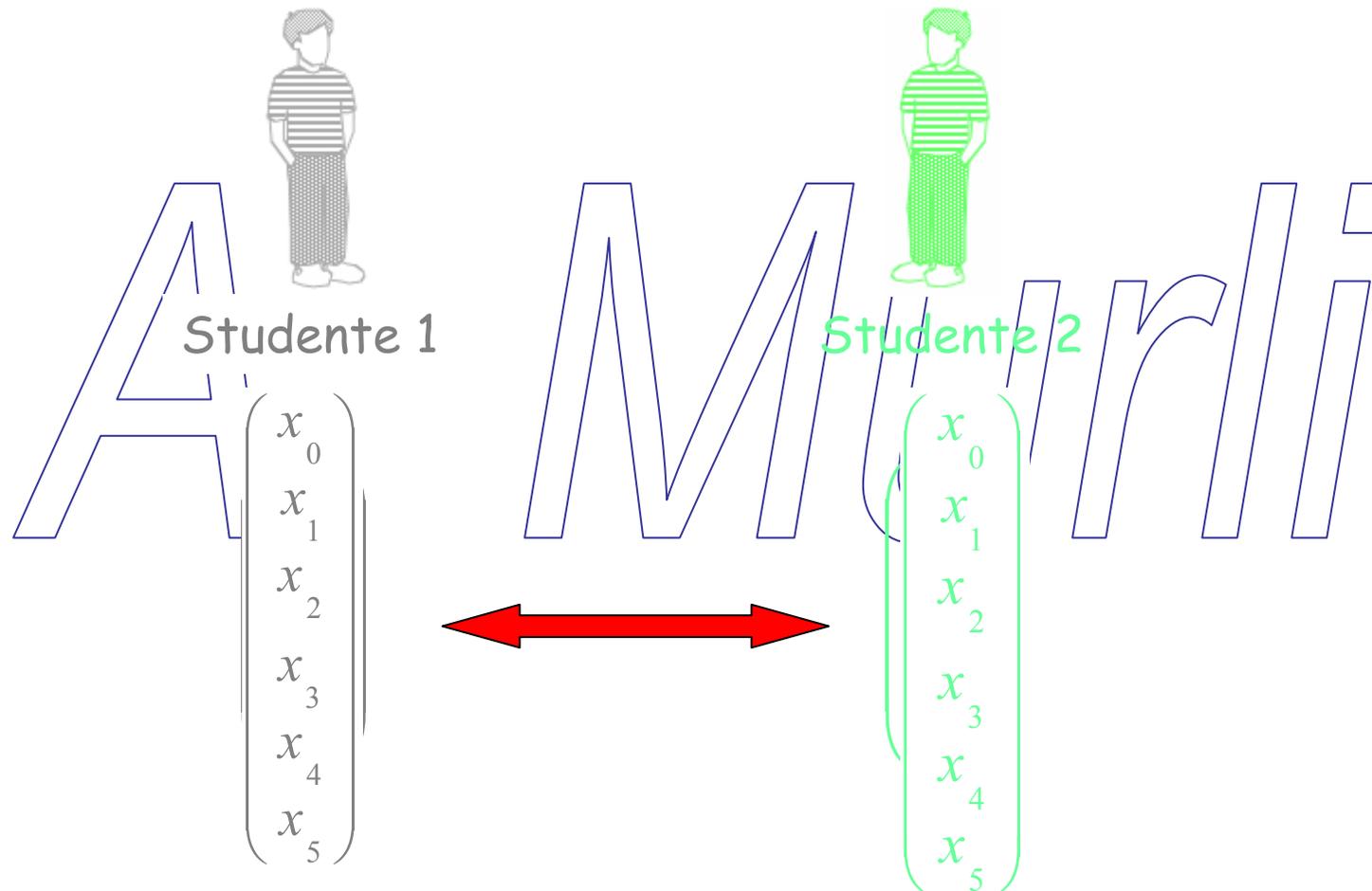
risolvendo il sistema

Triangolare Inferiore

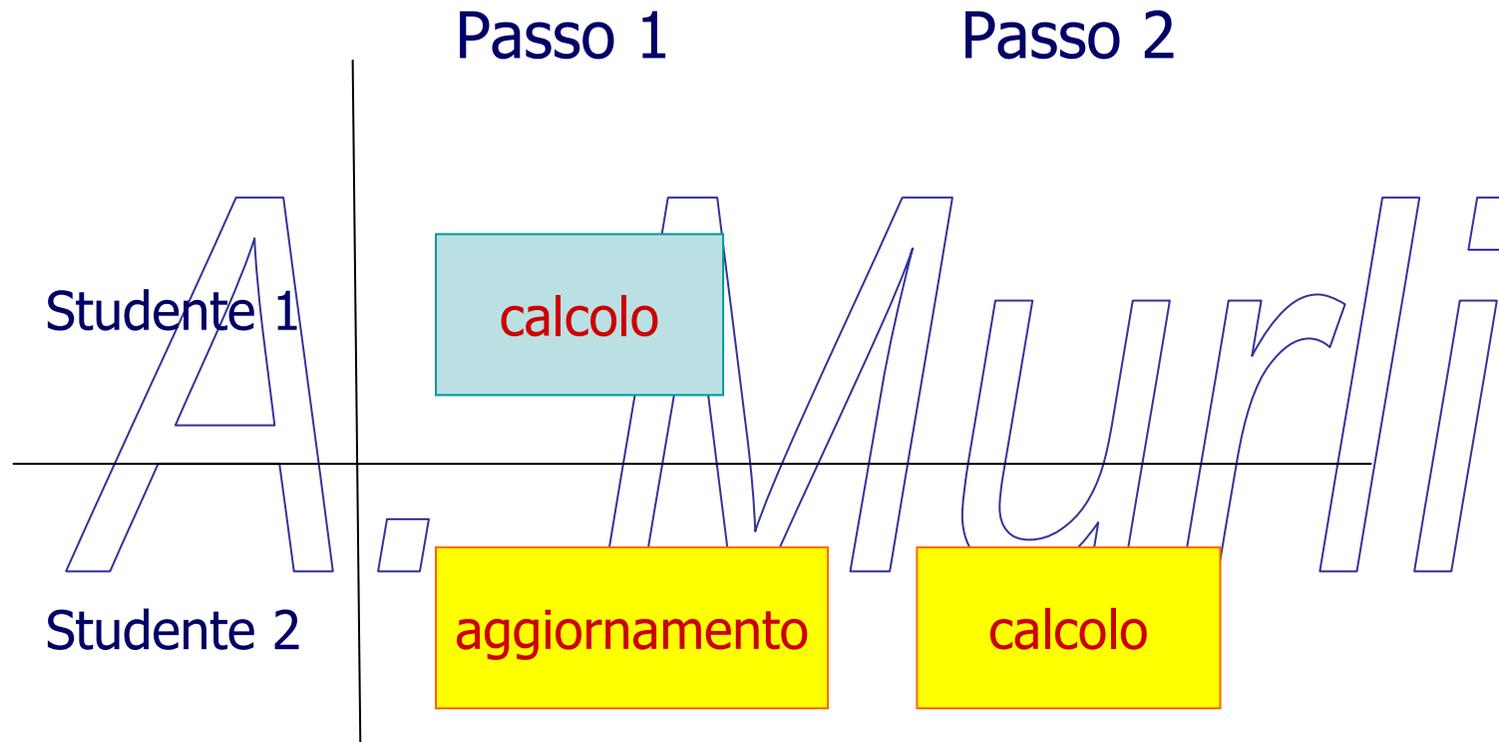


Studente 2

Collezione (gather) del vettore soluzione

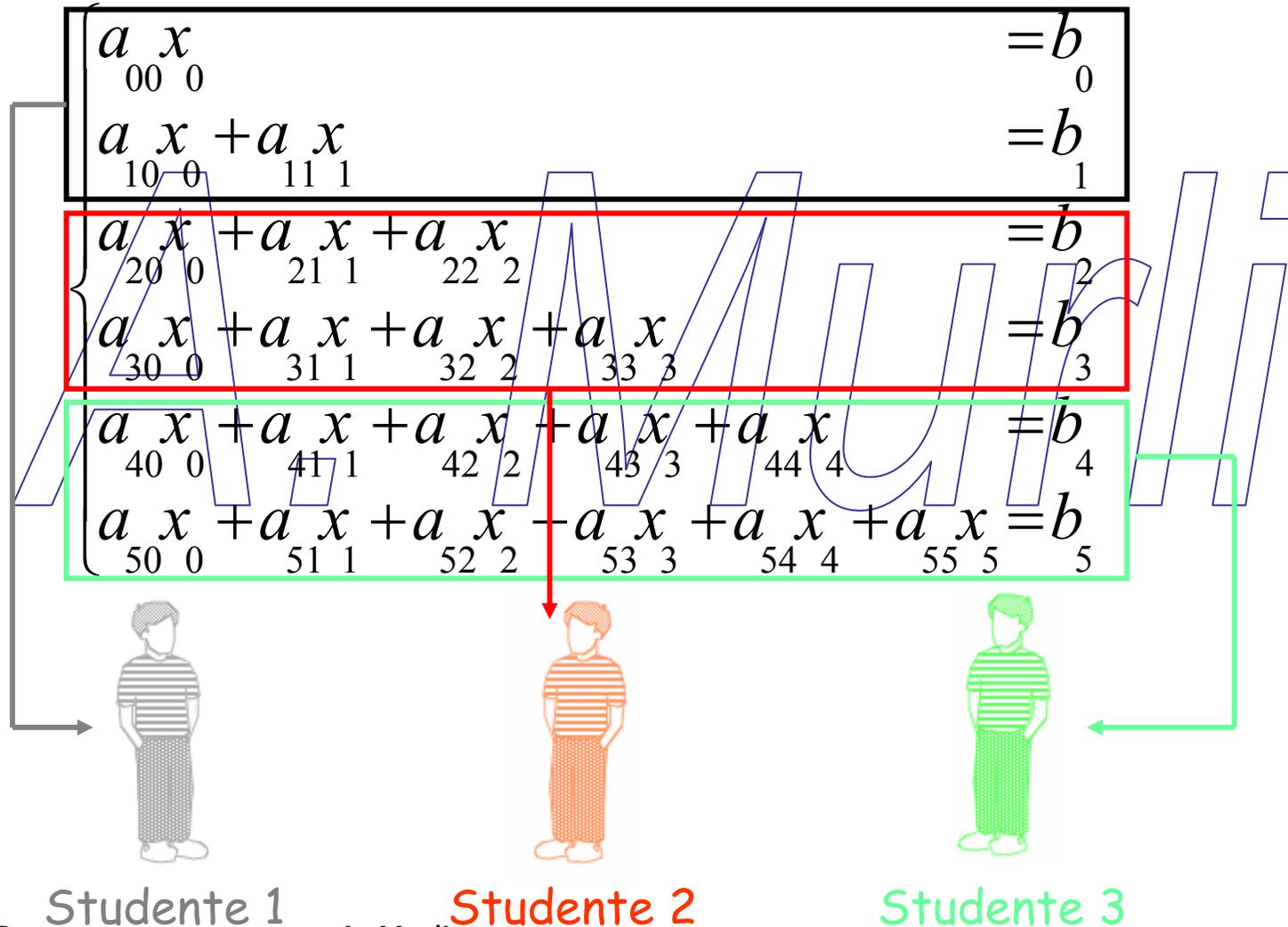


I Strategia

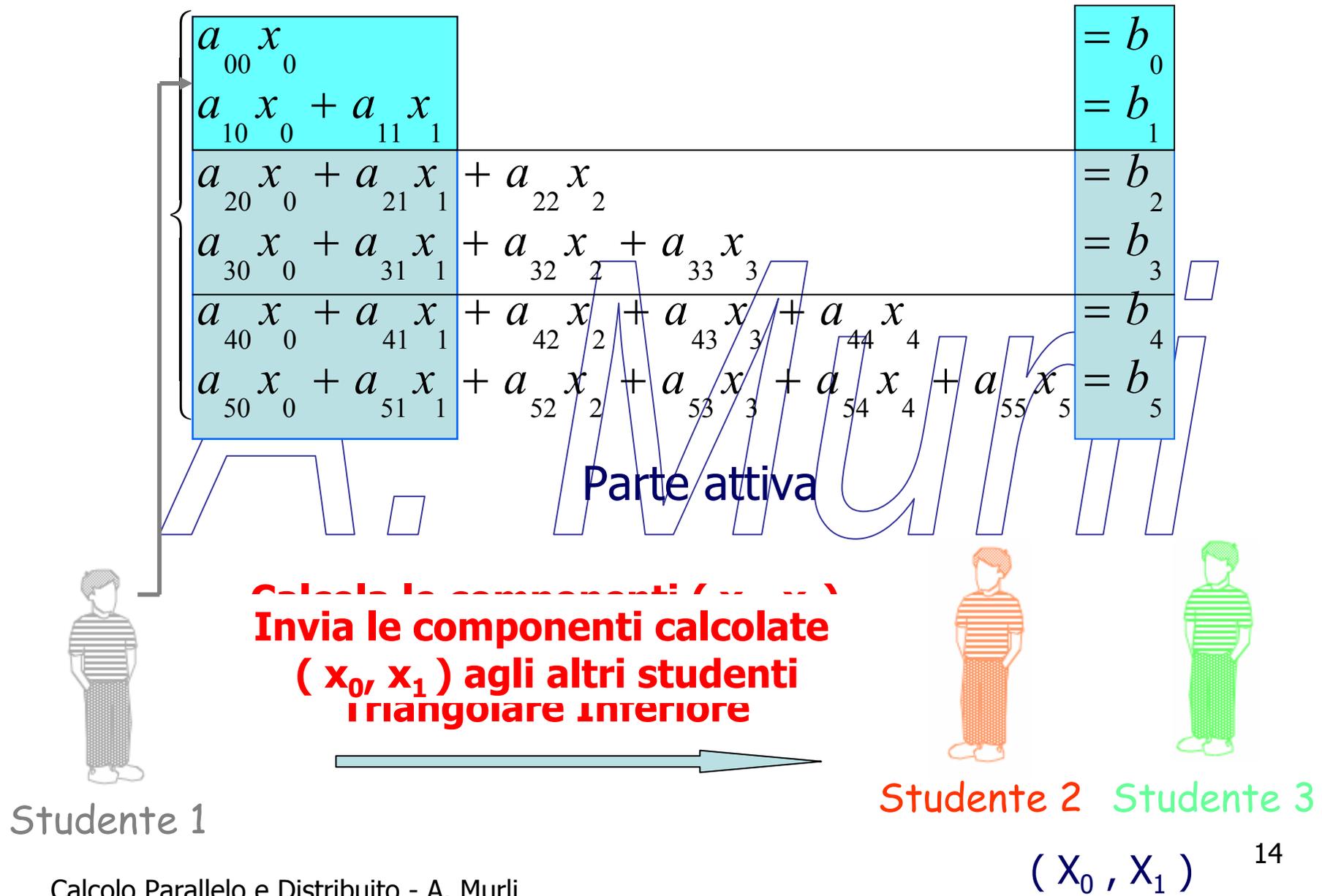


I Strategia: Distribuzione dei dati per righe

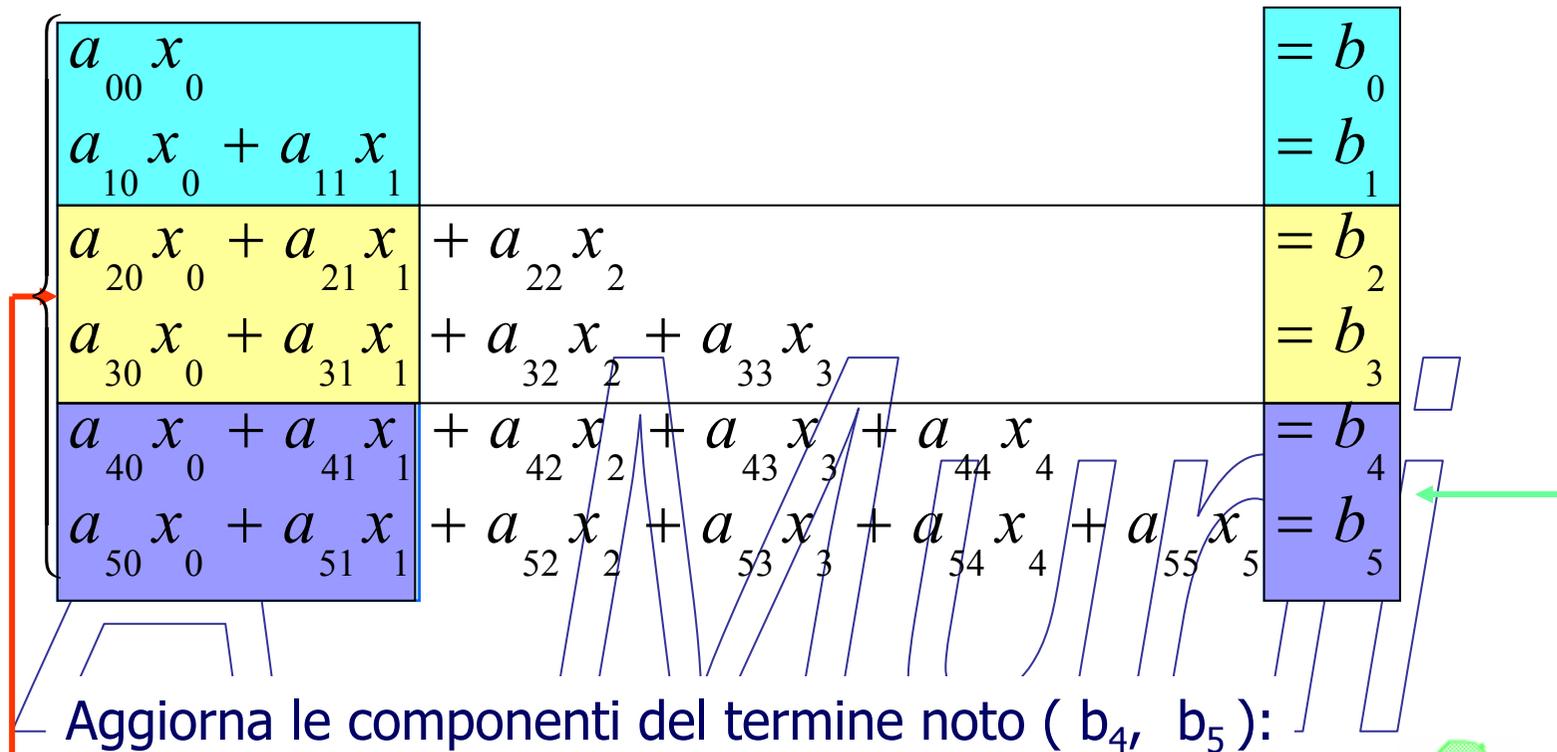
Consideriamo un sistema di dimensione $n=6$ e 3 Studenti



Passo 1 → Studente 1: calcolo + spedizione a Stud. 2,3



Passo 1 → Studente 2,3: aggiornamento dati



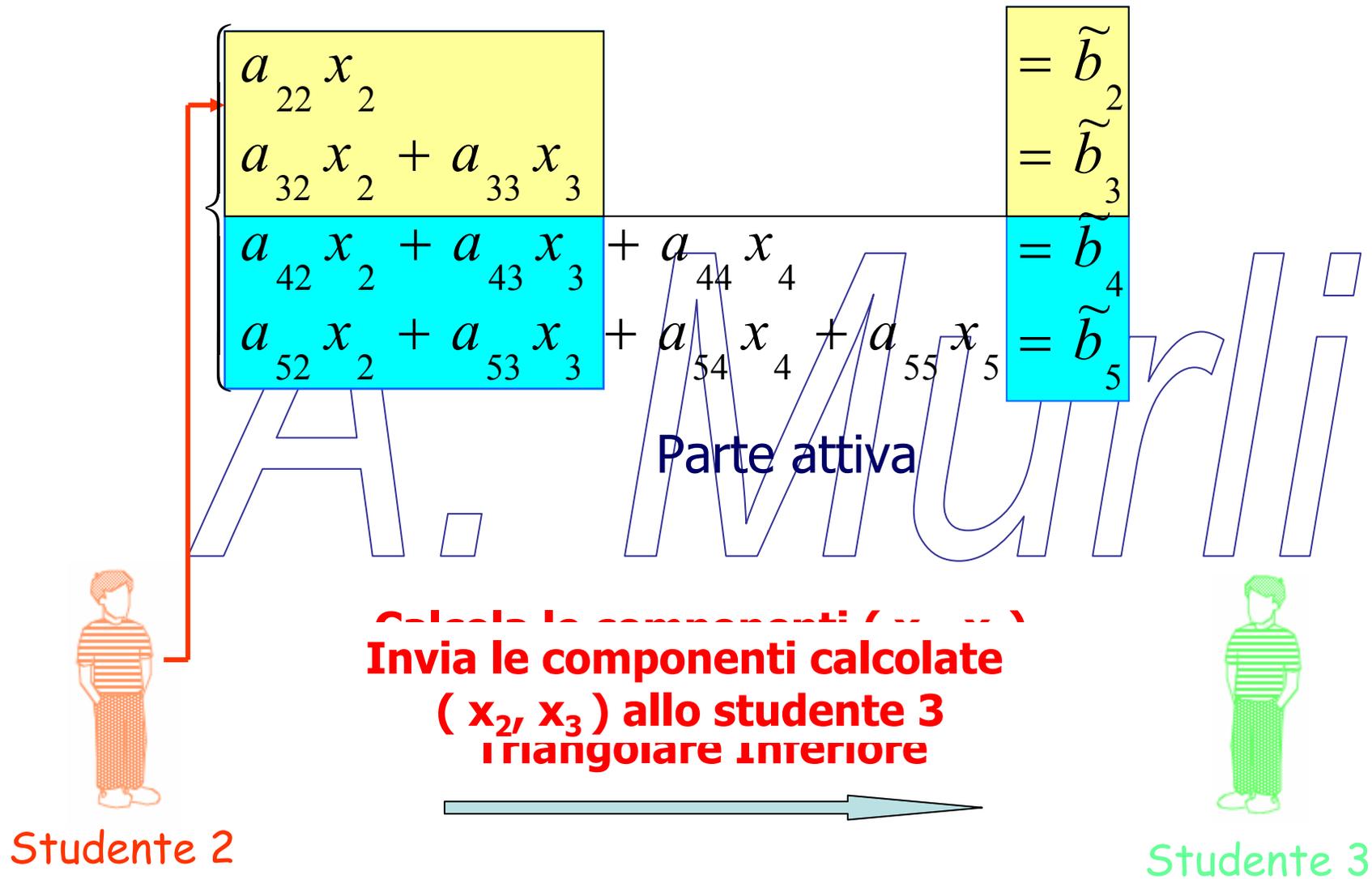
Studente 2

$$\begin{cases} a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - (a_{40}x_0 + a_{41}x_1) = \tilde{b}_4 \\ a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - (a_{50}x_0 + a_{51}x_1) = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

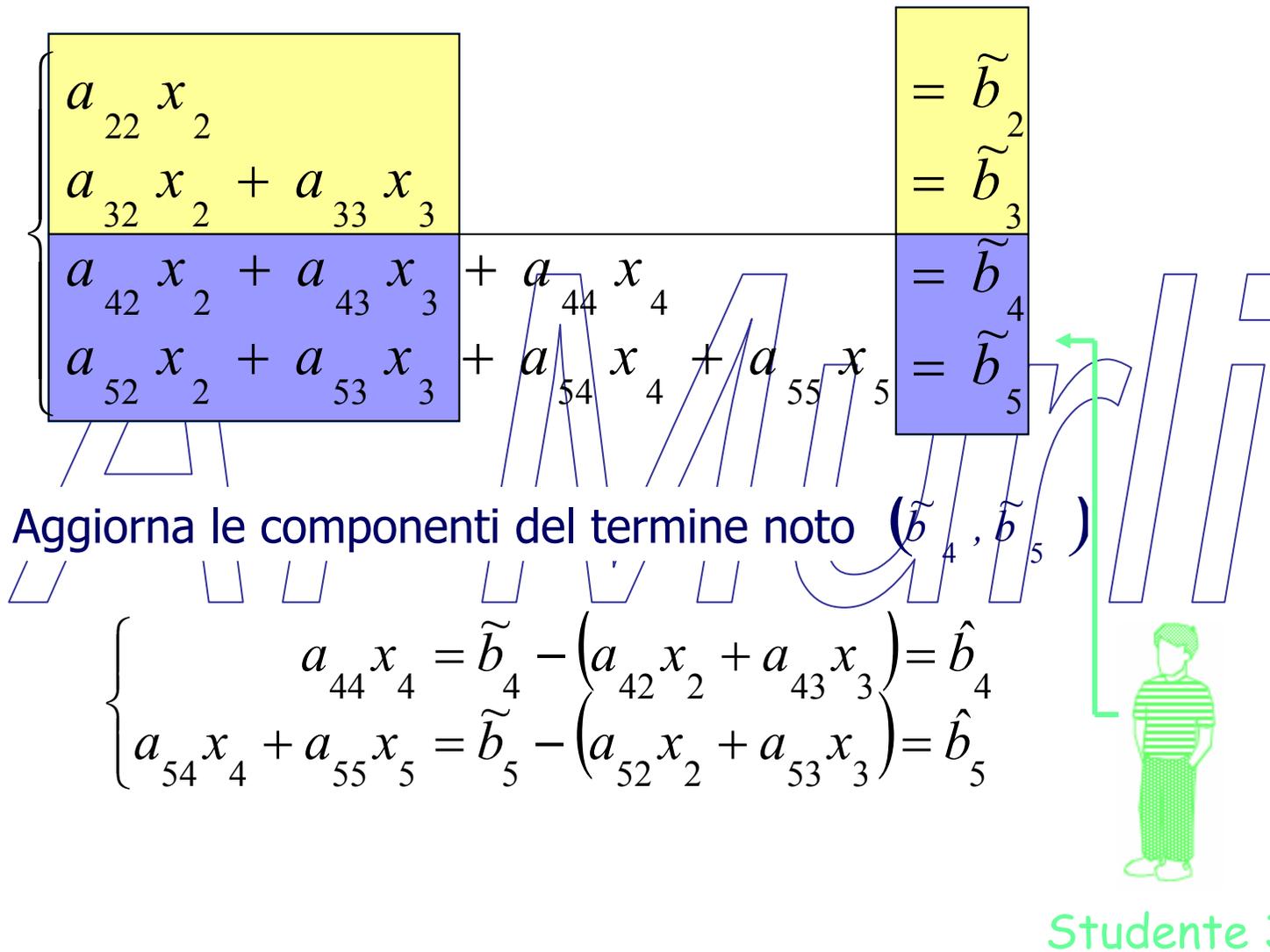


Studente 3

Passo 2 → Studente 2: calcolo + spedizione a Studente 3



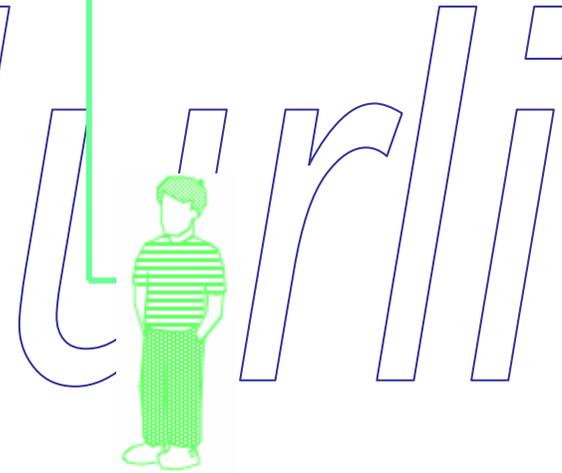
Passo 2 → Studente 3: aggiornamento dati



Passo 3 → Studente 3 : calcolo

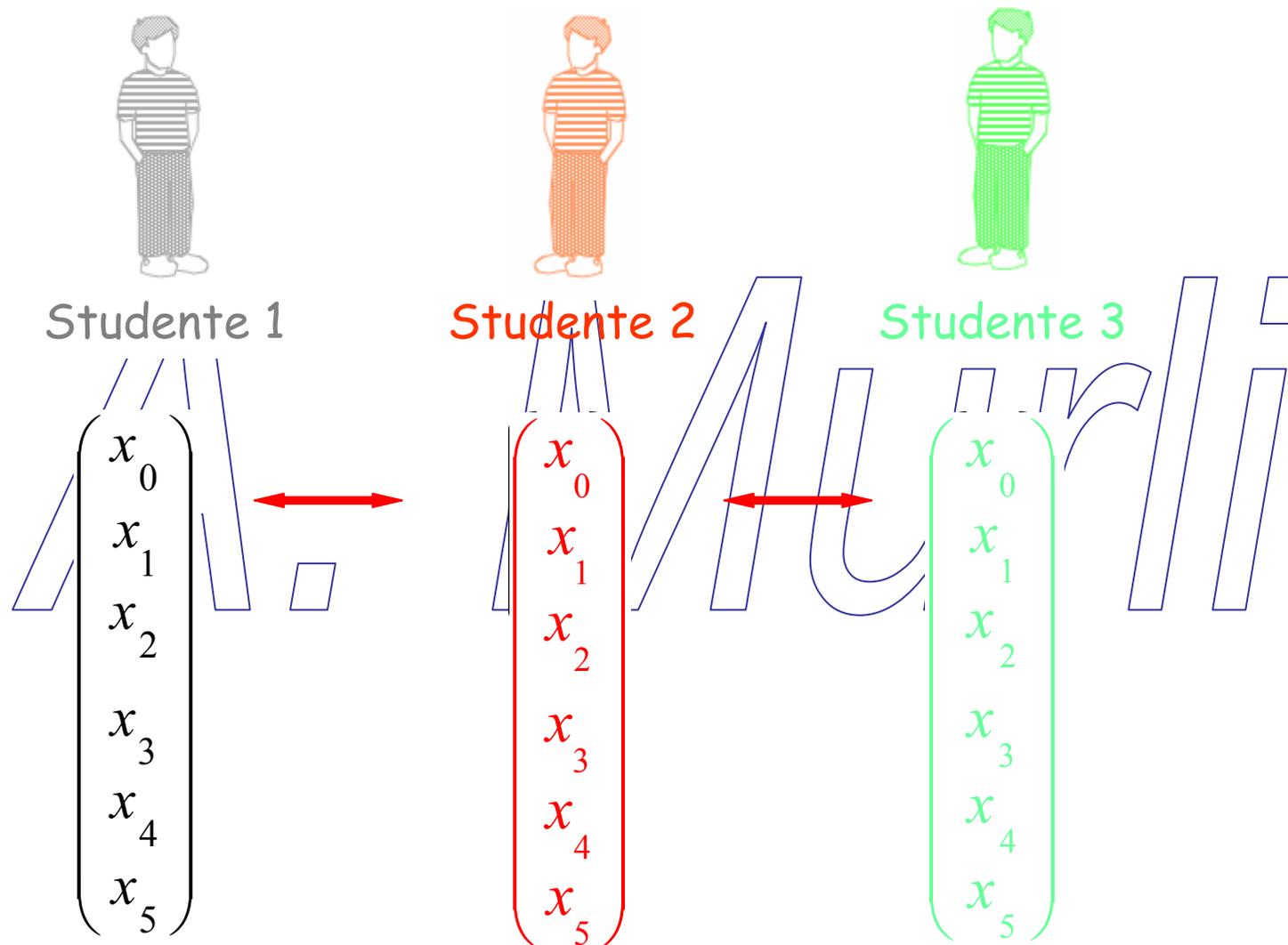
$$\begin{cases} a_{44} x_4 = \hat{b}_4 \\ a_{54} x_4 + a_{55} x_5 = \hat{b}_5 \end{cases}$$

**Calcola le componenti (x_4, x_5)
risolvendo il sistema
Triangolare inferiore**

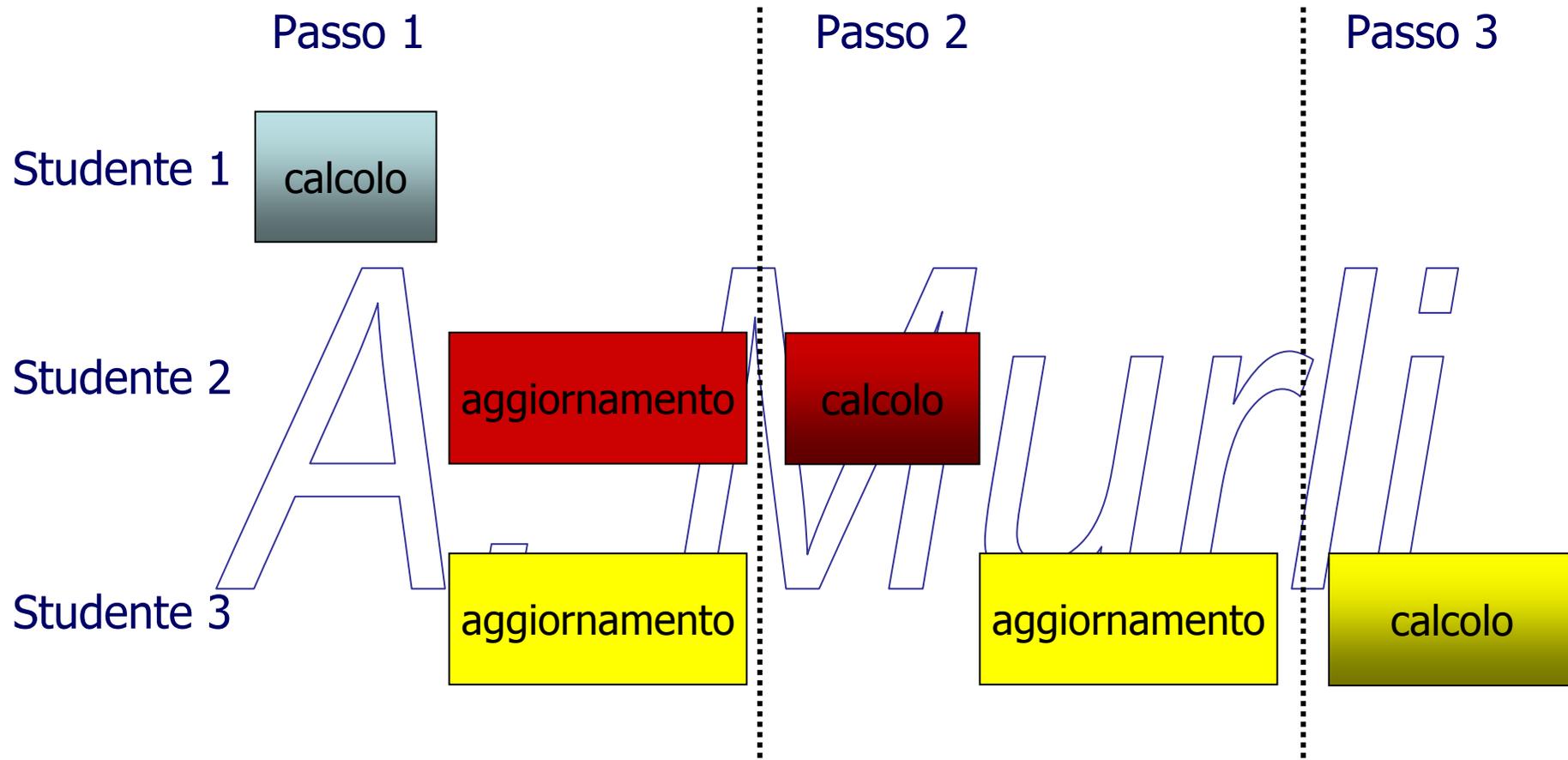


Studente 3

Collezione (gather) del vettore soluzione

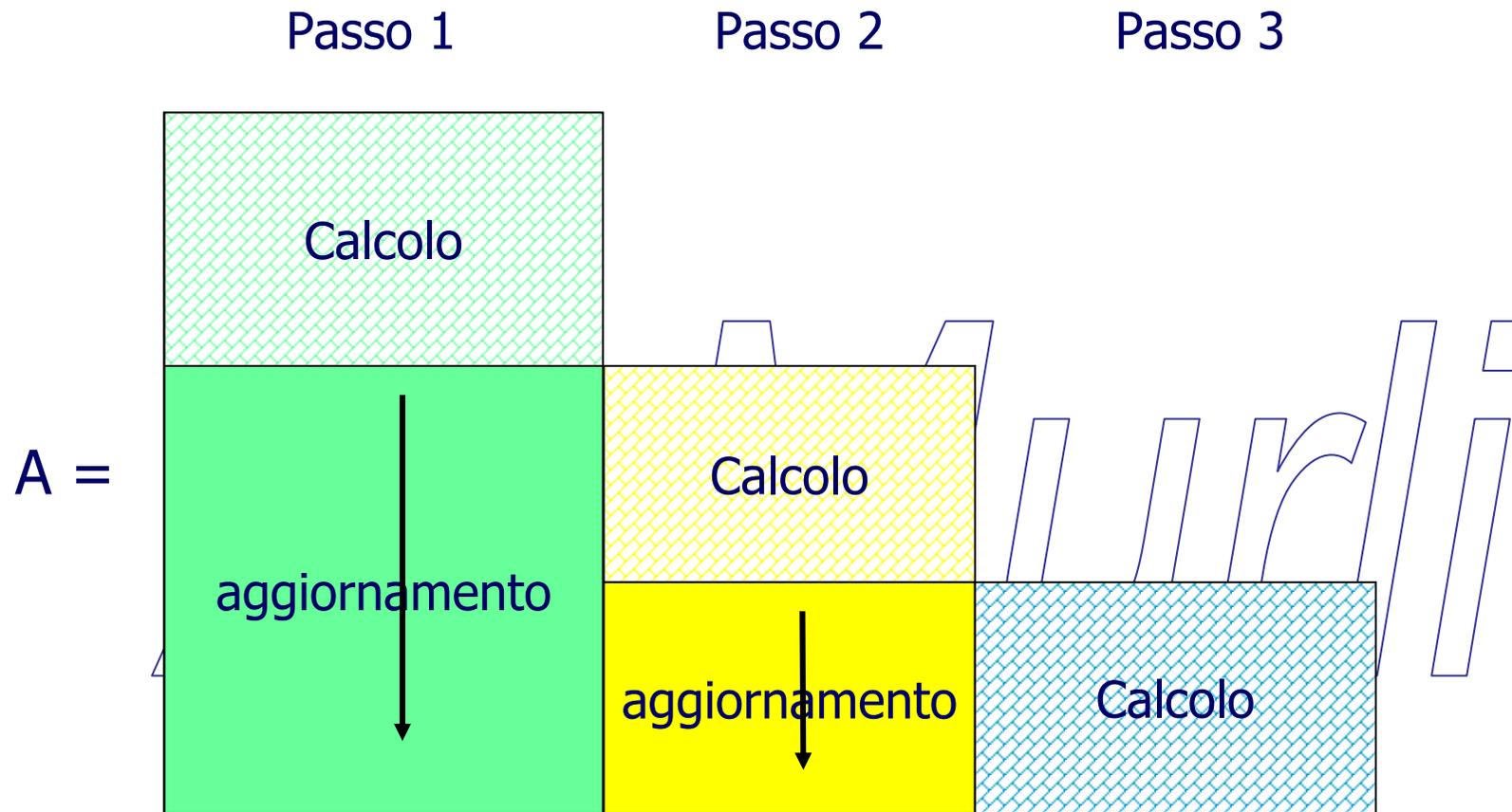


Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



**Il workload procede dall'alto verso il basso
e da sinistra verso destra**

Fasi di calcolo sulla matrice ad ogni passo:



Trasformazione della matrice (**workflow**)
dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra

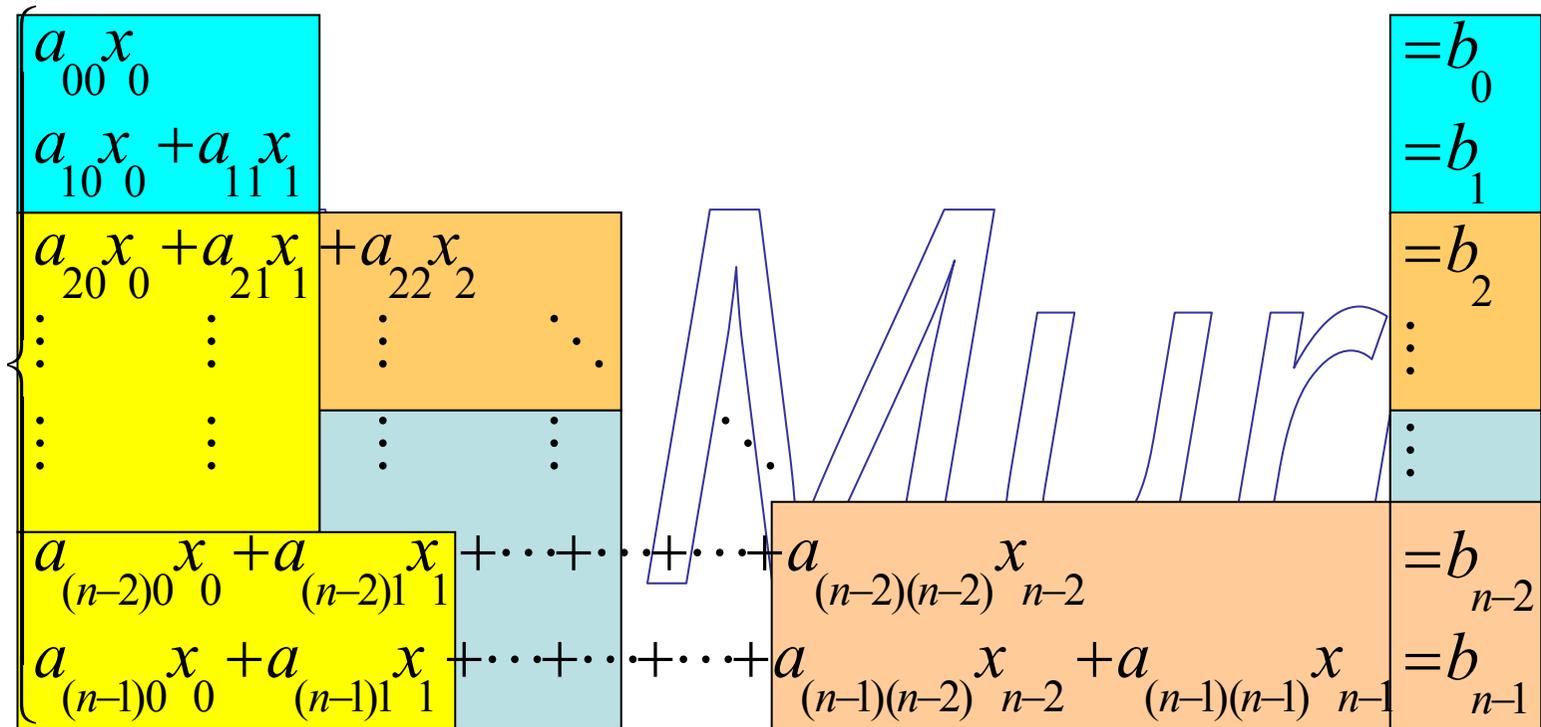
I Strategia: in generale...

Consideriamo un sistema di dimensione $2n$ ed n studenti

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{00} x_0 = b_0 \\ a_{10} x_0 + a_{11} x_1 = b_1 \\ a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_{(n-2)0} x_0 + a_{(n-2)1} x_1 + \dots + a_{(n-2)(n-2)} x_{n-2} = b_{n-2} \\ a_{(n-1)0} x_0 + a_{(n-1)1} x_1 + \dots + a_{(n-1)(n-2)} x_{n-2} + a_{(n-1)(n-1)} x_{n-1} = b_{n-1} \end{array} \right.$$

Distribuzione dei dati tra gli n Studenti

I Strategia: in generale...



Passo 1

P_{n-1}
 $P_2 \dots P_{n-1}$

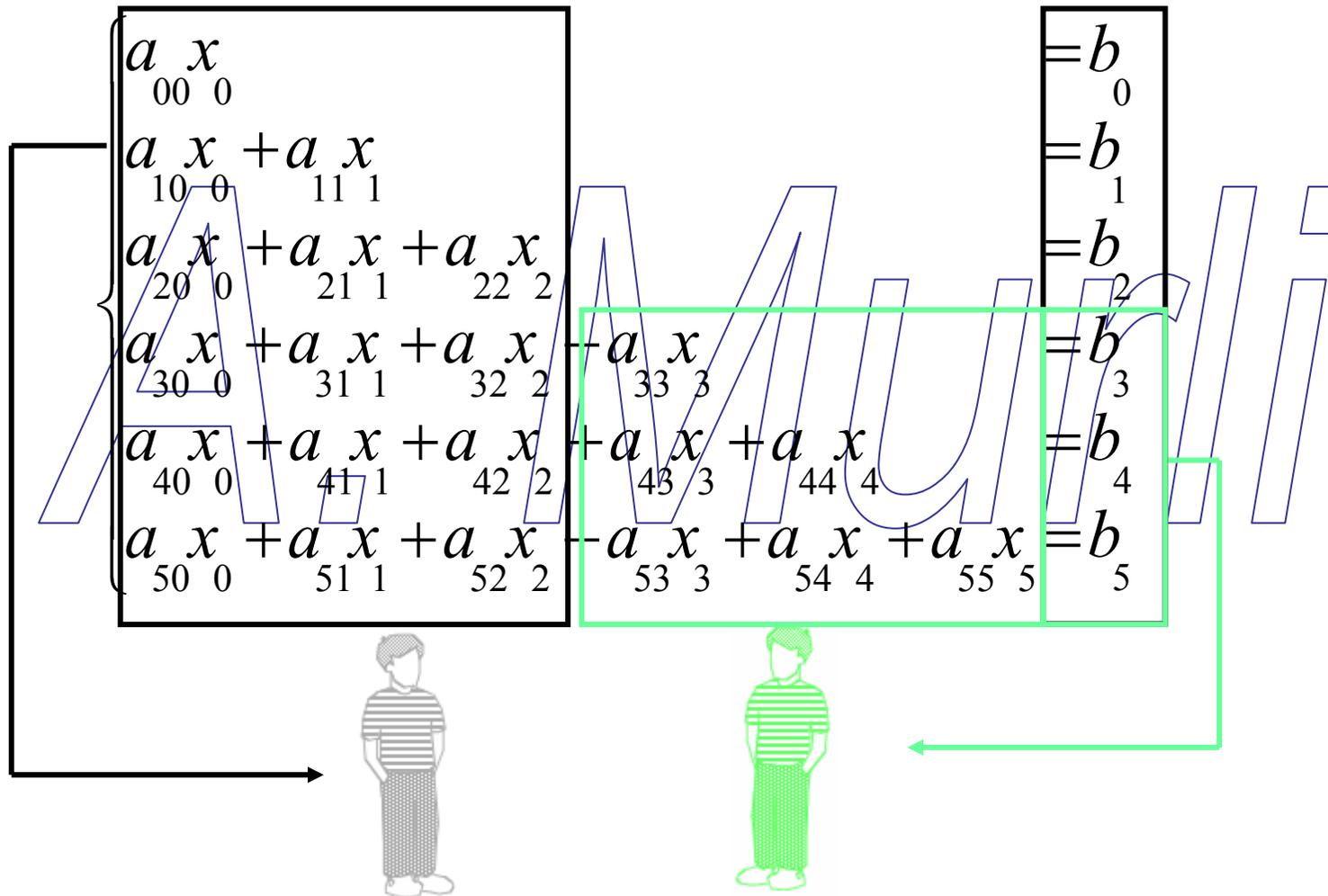
risolve il sistema triangolare inferiore
 aggiornano i termini noti

I Strategia: Schema dell'algoritmo ...

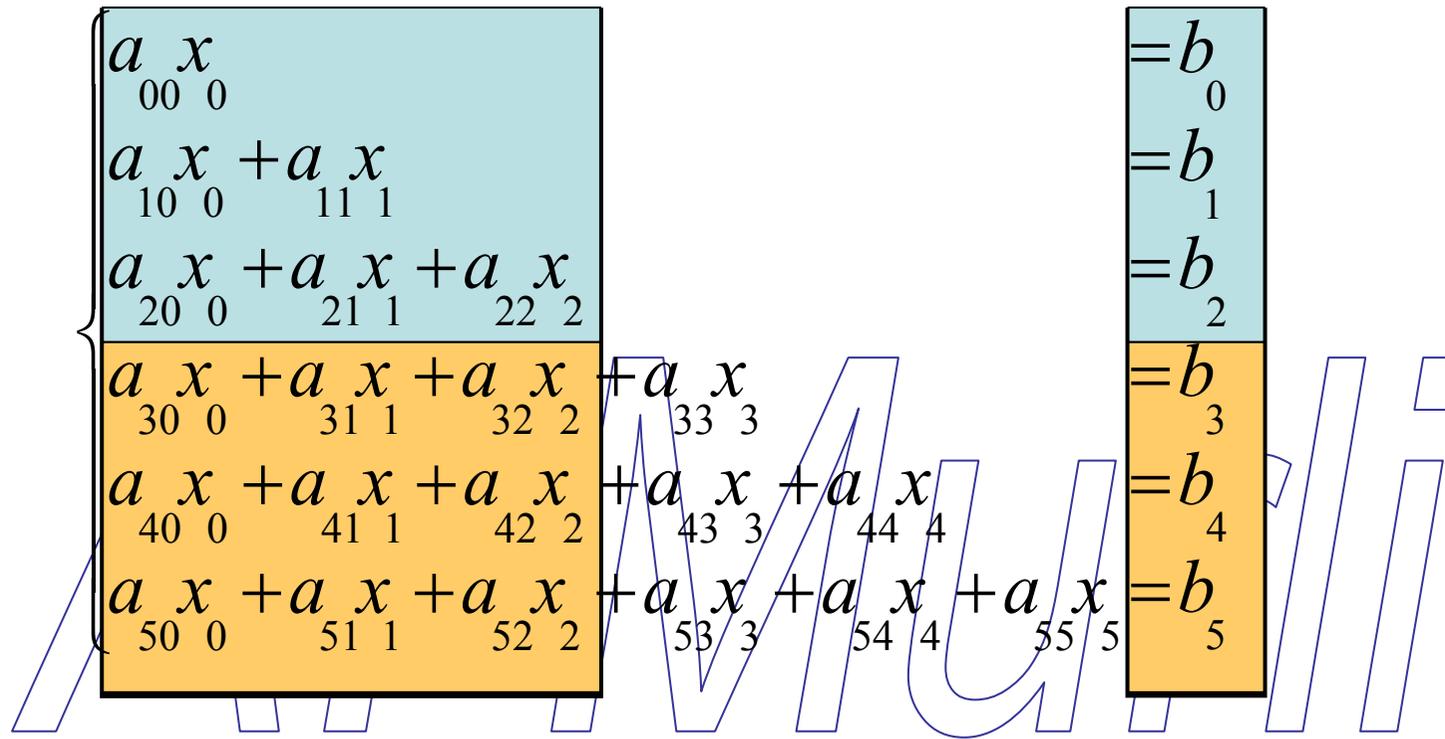
```
    tag=j+77+i;
    MPI_Send(&x[inloc],nloc,MPI_FLOAT,j,tag,MPI_COMM_WORLD);
  }
}
/* I processori che il cui identificativo è maggiore del passo devono
   aggiornare il termine noto del sistema */
if(menum>i)
{
    tag=menum+77+i;
    MPI_Rcve(&x[inloc],nloc, MPI_FLOAT,i,tag,MPI_COMM_WORLD,&status);
    for(j=0;j<nloc;j++)
    {
        sum2=0.;
        for(k=inloc;k<inloc+nloc;k++)
        {
            sum2+=a[j][k]*x[k];
        }
        b[j]=b[j]-sum2;
    }
}
}
MPI_Bcast(x,n,MPI_FLOAT,nproc-1,MPI_COMM_WORLD);
/* Inizio fase di stampa */
...
}
```

II Strategia: distribuzione dei dati per colonne

Consideriamo un sistema di dimensione $n=6$ e 2 Studenti



Passo 1 → studente 1: calcolo+aggiornamento



Studente 1

Aggiorna le componenti

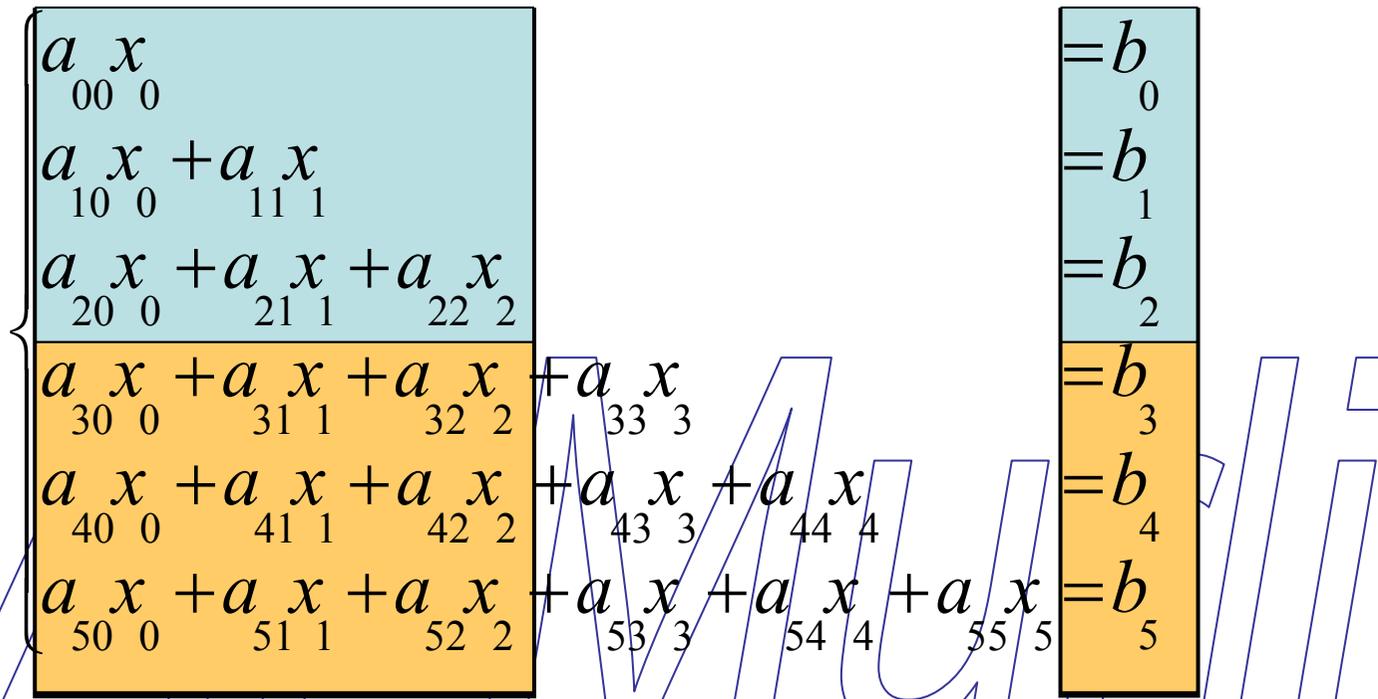
Lo studente 2 **Non** compie
nessuna operazione

le componenti (x_0, x_1, x_2)



Studente 2

Passo 1 → Studente 1 : spedizione dati a Studente 2



Lo **Studente 1** spedisce allo **Studente 2**
 le componenti aggiornate del termine noto

$$(\tilde{b}_3, \tilde{b}_4, \tilde{b}_5)$$



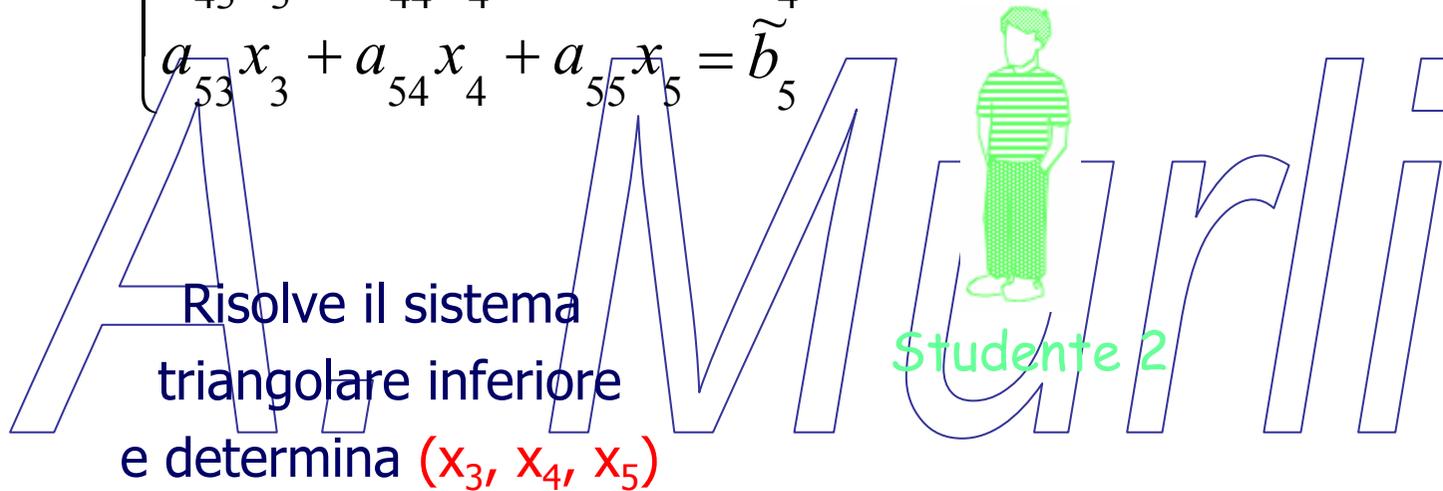
Studente 1



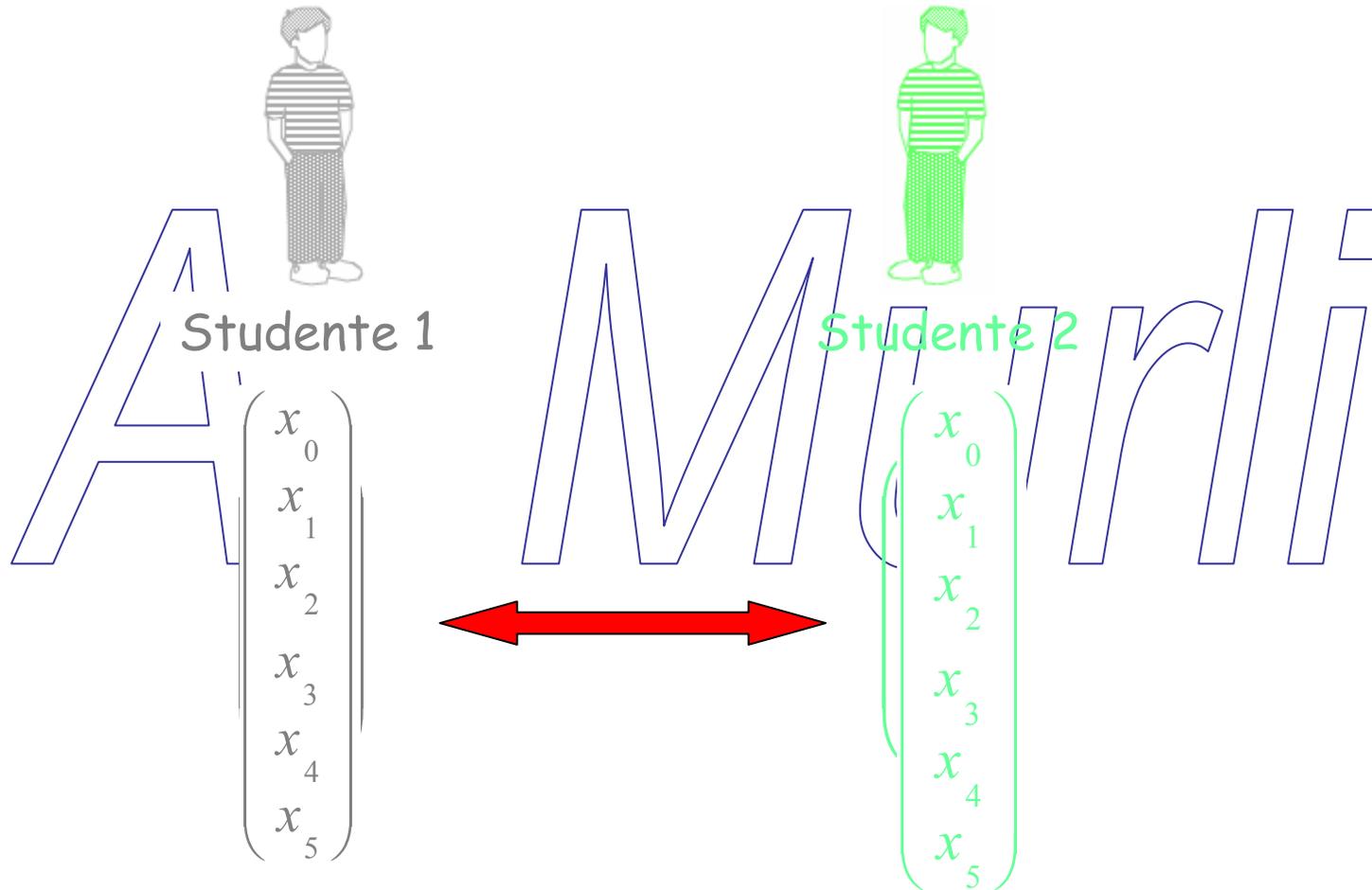
Studente 2

Passo 2 → Studente 2: calcolo

$$\begin{cases} a_{33}x_3 & = \tilde{b}_3 \\ a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = \tilde{b}_4 \\ a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

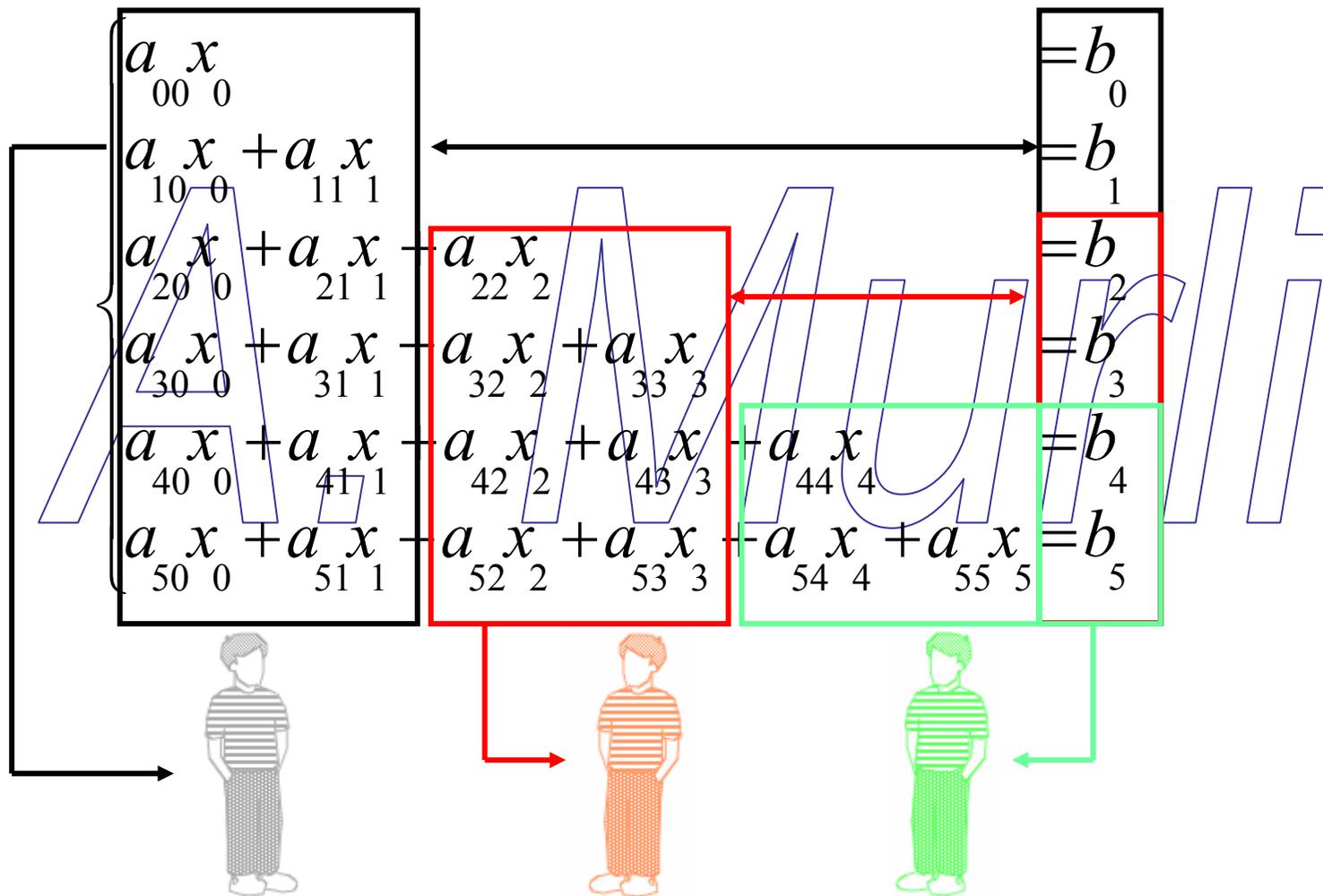


Collezione (gather) del vettore soluzione

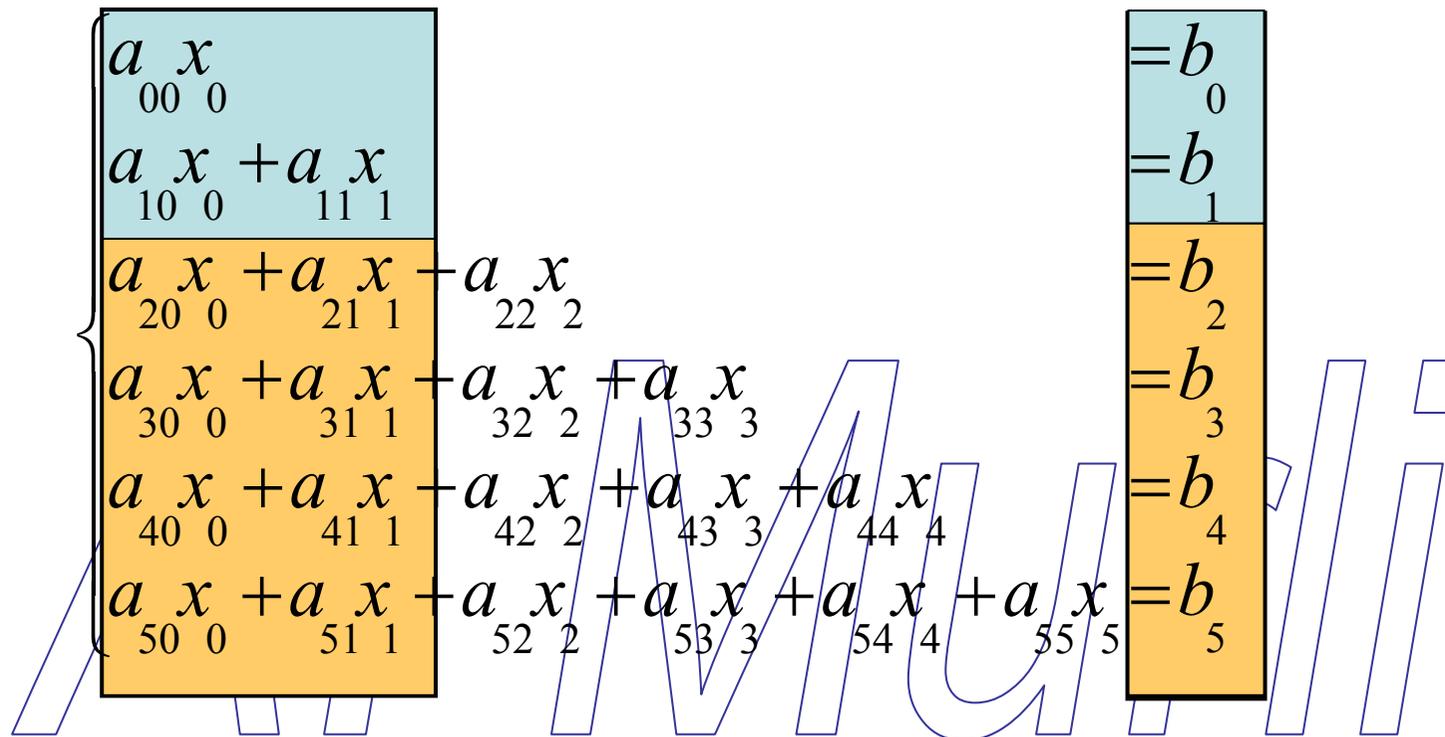


II Strategia: distribuzione dei dati per colonne

Consideriamo un sistema di dimensione $n=6$ e $p=3$ Studenti



Passo 1 → Studente 1: calcolo + aggiornamento



Studente 1

Aggiorna le componenti
 Gli student1 2 e 3 **Non** compiono
 nessuna operazione
 le componenti (x_0, x_1)



Studente 2 Studente 3

Passo 1 → Studente 1 : spedizione dati a Studente 2,3

$$\begin{array}{l}
 a x_{00} \\
 a x_{10} + a x_{11} \\
 a x_{20} + a x_{21} + a x_{22} \\
 a x_{30} + a x_{31} + a x_{32} + a x_{33} \\
 a x_{40} + a x_{41} + a x_{42} + a x_{43} + a x_{44} \\
 a x_{50} + a x_{51} + a x_{52} + a x_{53} + a x_{54} + a x_{55}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 b_0 \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 b_4 \\
 b_5
 \end{array}$$

Lo **Studente 1** spedisce agli altri studenti le componenti aggiornate del termine noto

$$(\tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4, \tilde{b}_5)$$



Studente 1

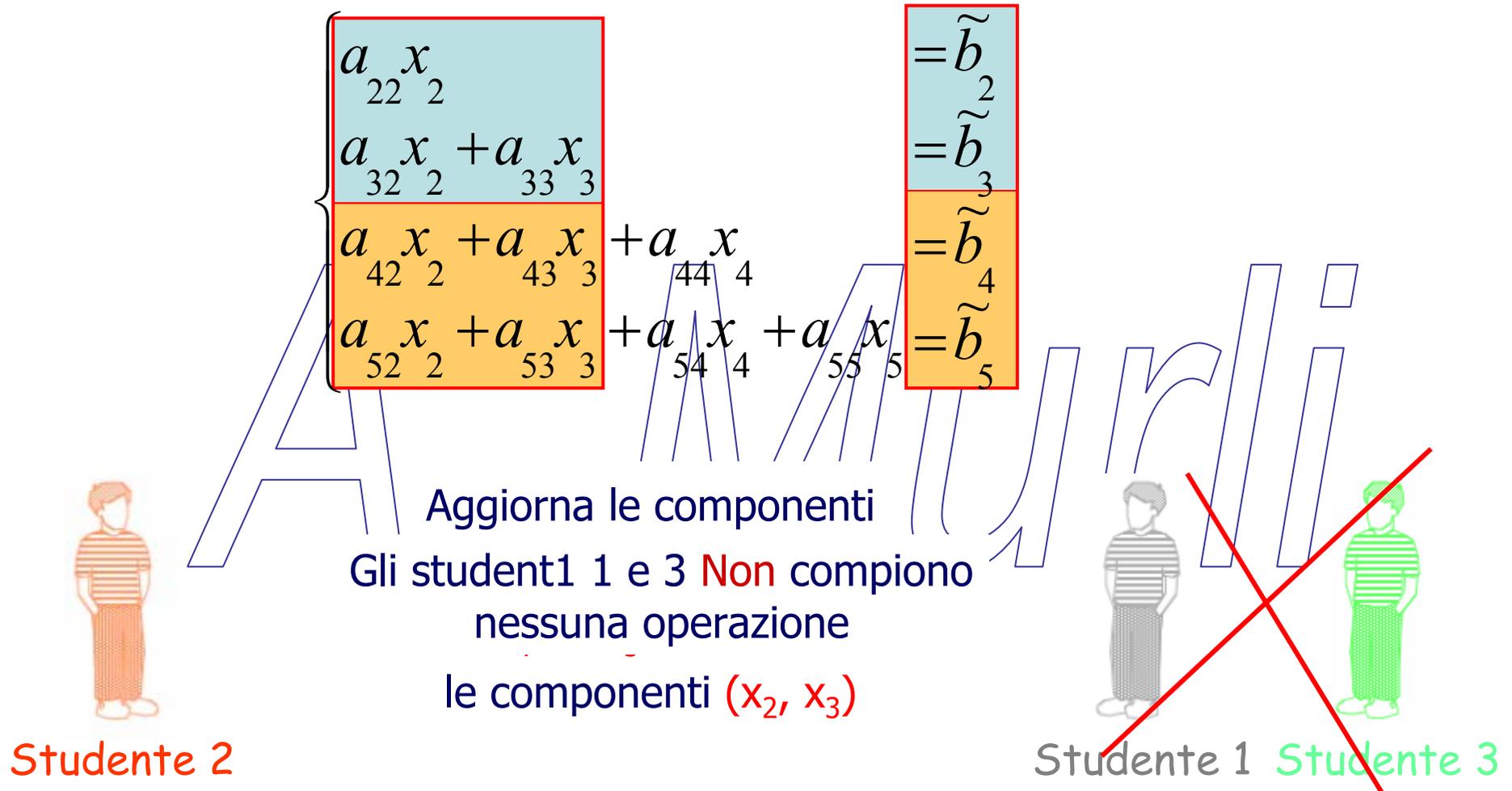


Studente 2

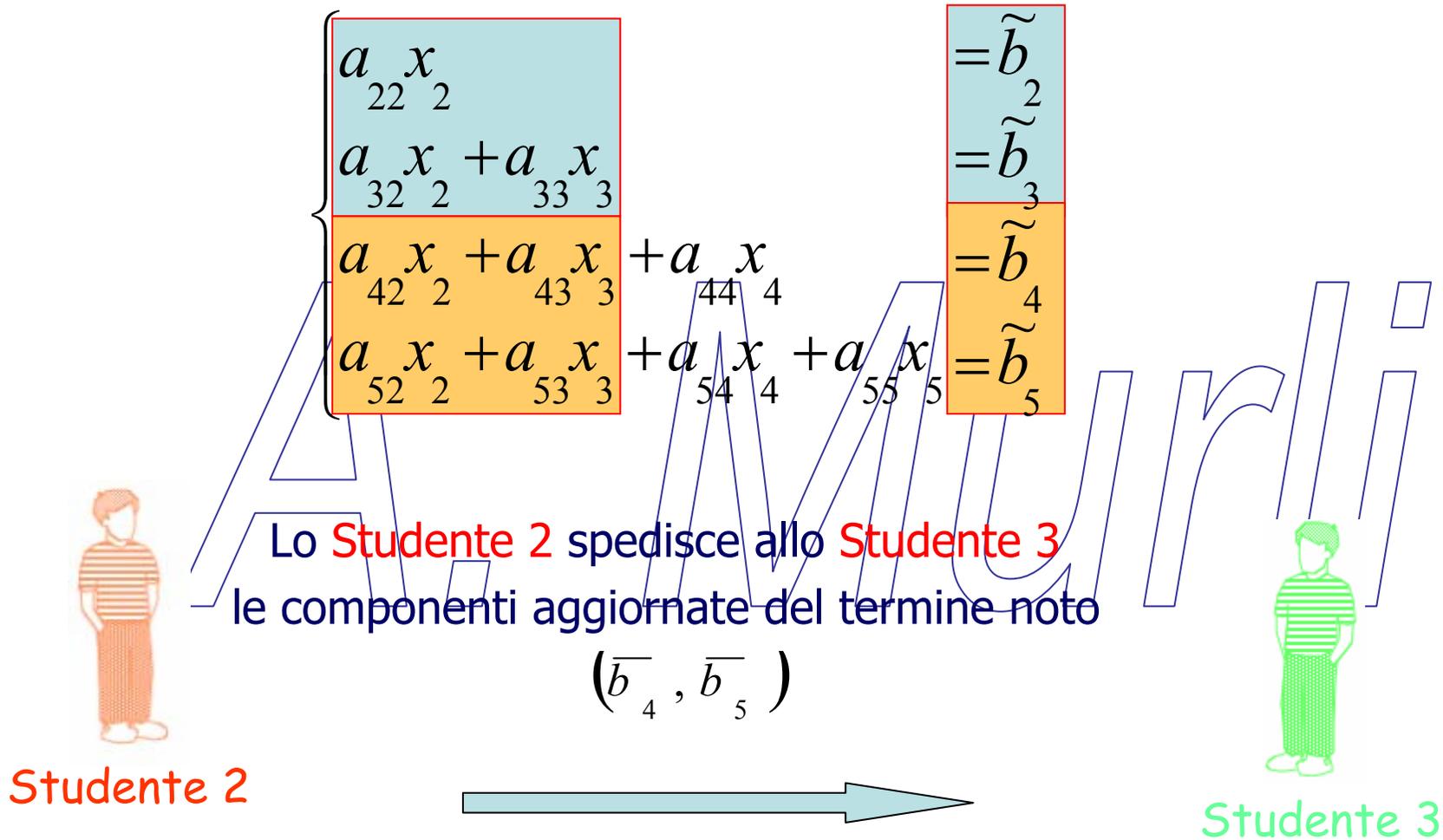


Studente 3

Passo 2 → Studente 2 : calcolo + aggiornamento



Passo 2 → Studente 2: spedizione dati a Studente 3



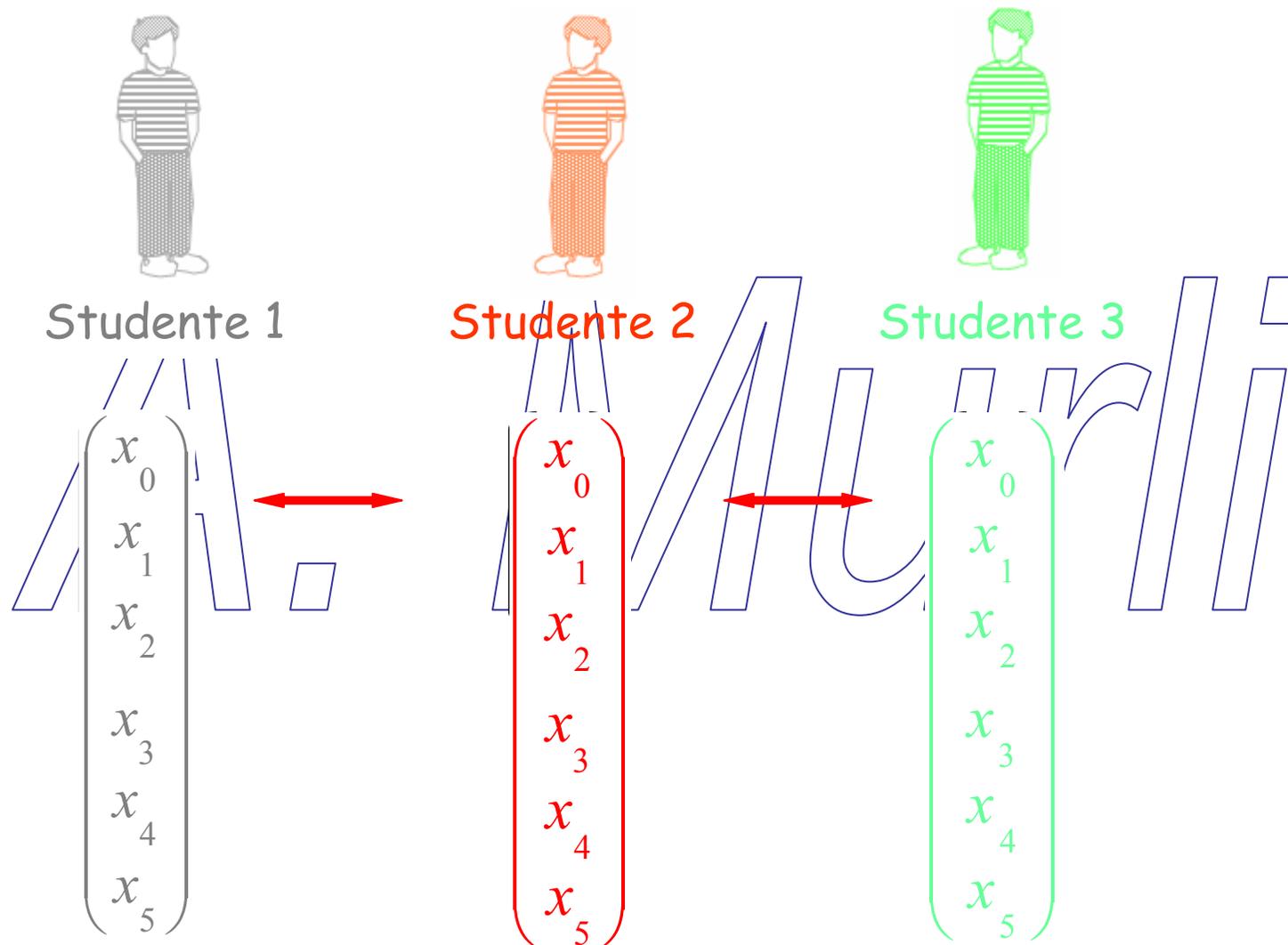
Passo 3 → Studente 3: calcolo

$$\begin{cases} a_{44} x_4 = \bar{b}_4 \\ a_{54} x_4 + a_{55} x_5 = \bar{b}_5 \end{cases}$$

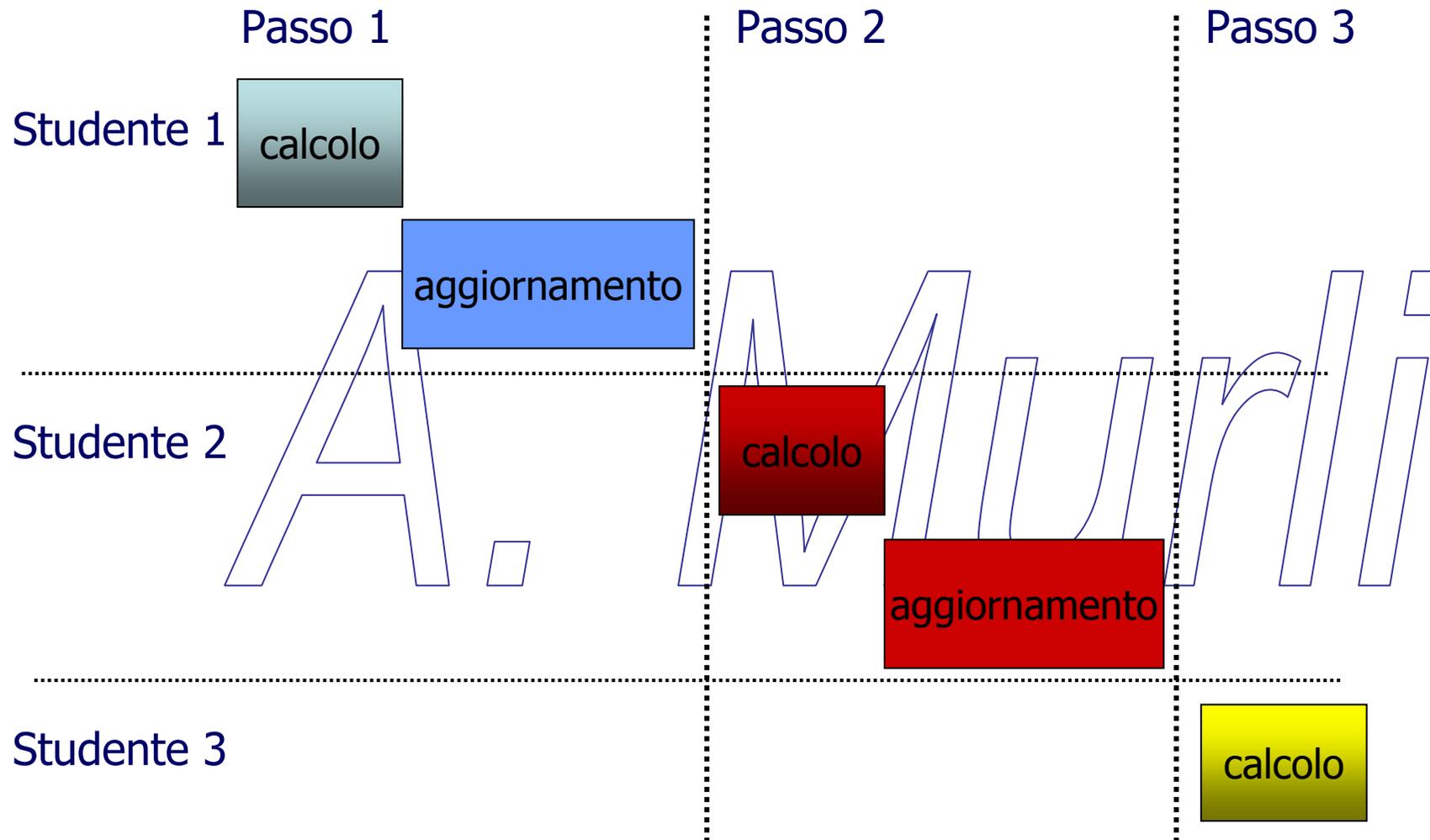
Risolve il sistema
triangolare inferiore
e determina (x_4, x_5)



Collezione (gather) del vettore soluzione

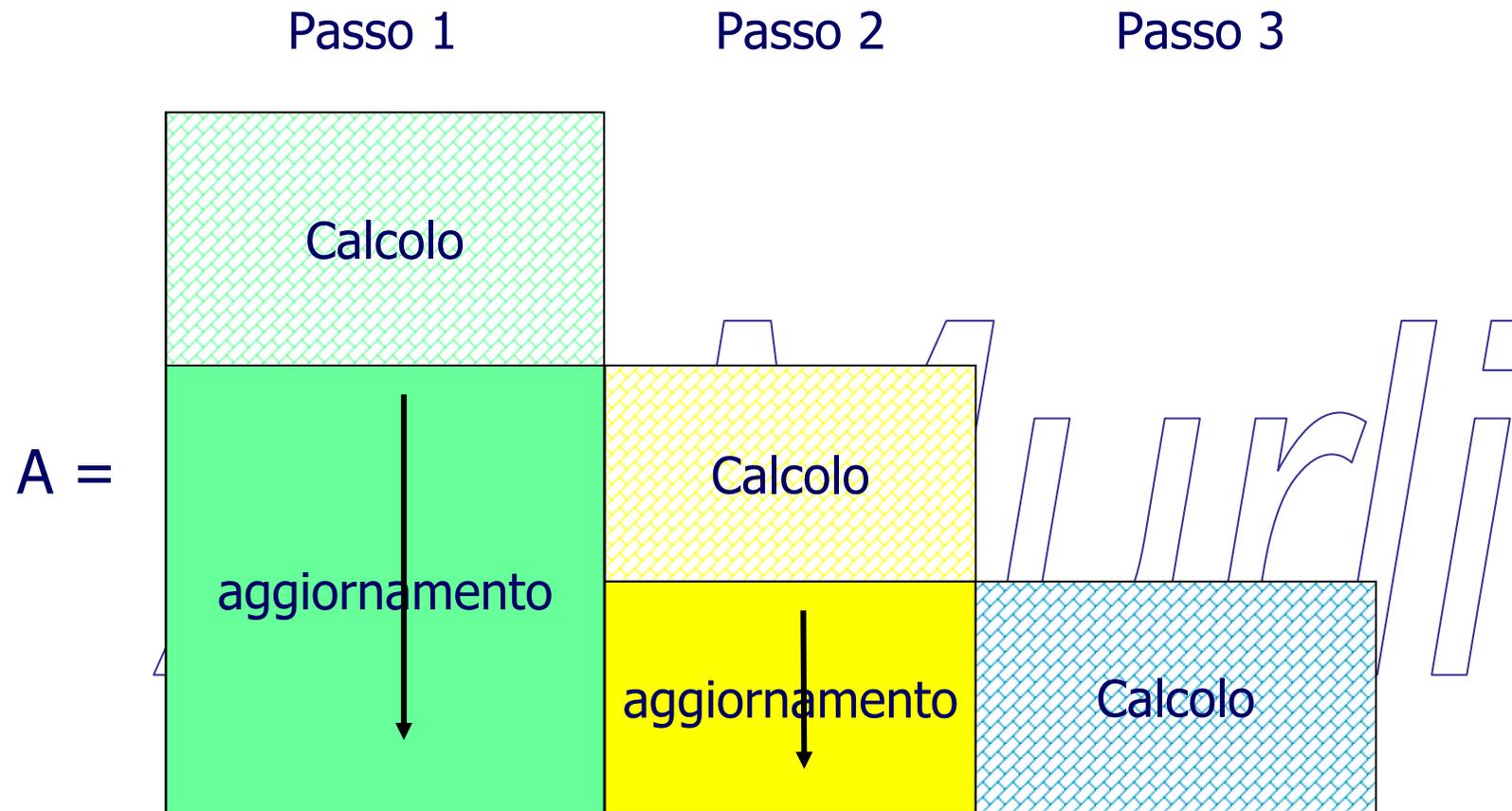


Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



Il workload procede dall'alto verso il basso
e da sinistra verso destra

Fasi di calcolo sulla matrice ad ogni passo:



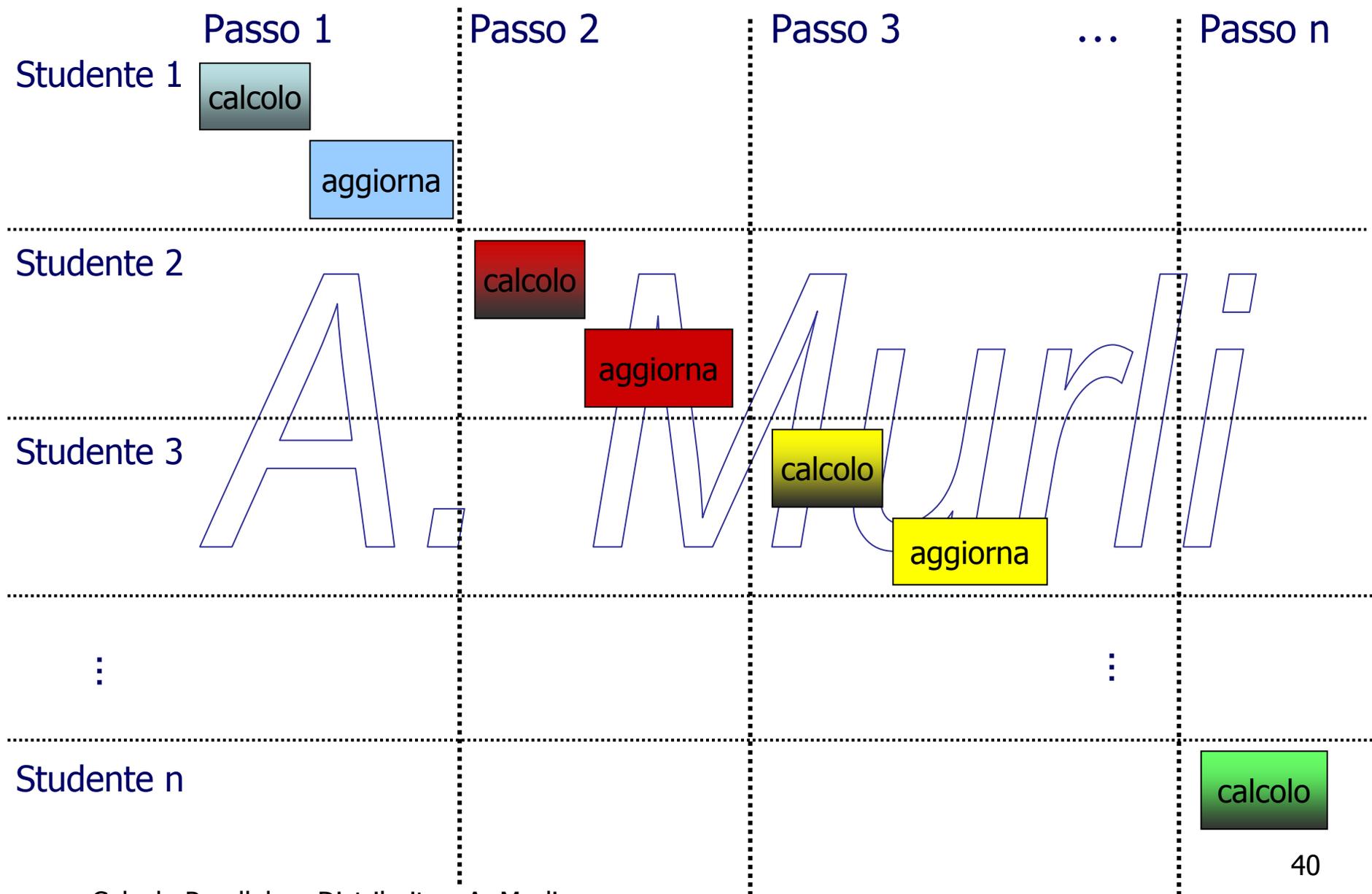
Trasformazione della matrice (workflow)
dall'alto verso il basso e da sinistra verso destra

II Strategia: in generale

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 a_{00} x_0 \\
 a_{10} x_0 + a_{11} x_1 \\
 a_{20} x_0 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 a_{(n-2)0} x_0 + a_{(n-2)1} x_1 + \dots + a_{(n-2)(n-2)} x_{n-2} \\
 a_{(n-1)0} x_0 + a_{(n-1)1} x_1 + \dots + a_{(n-1)(n-2)} x_{n-2} + a_{(n-1)(n-1)} x_{n-1}
 \end{array} \right\} = \begin{array}{l}
 b_0 \\
 b_1 \\
 b_2 \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 b_{n-2} \\
 b_{n-1}
 \end{array}
 \end{array}$$

Distribuzione dei dati tra gli n alunni

Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



II Strategia: osservazioni

Ad ogni passo $k= 1, \dots, p$, solo il processore $k-1$ risolve il proprio sistema triangolare inferiore ed aggiorna le componenti del vettore dei termini noti necessarie nei passi successivi e li invia ai processori $k, \dots, p-1$

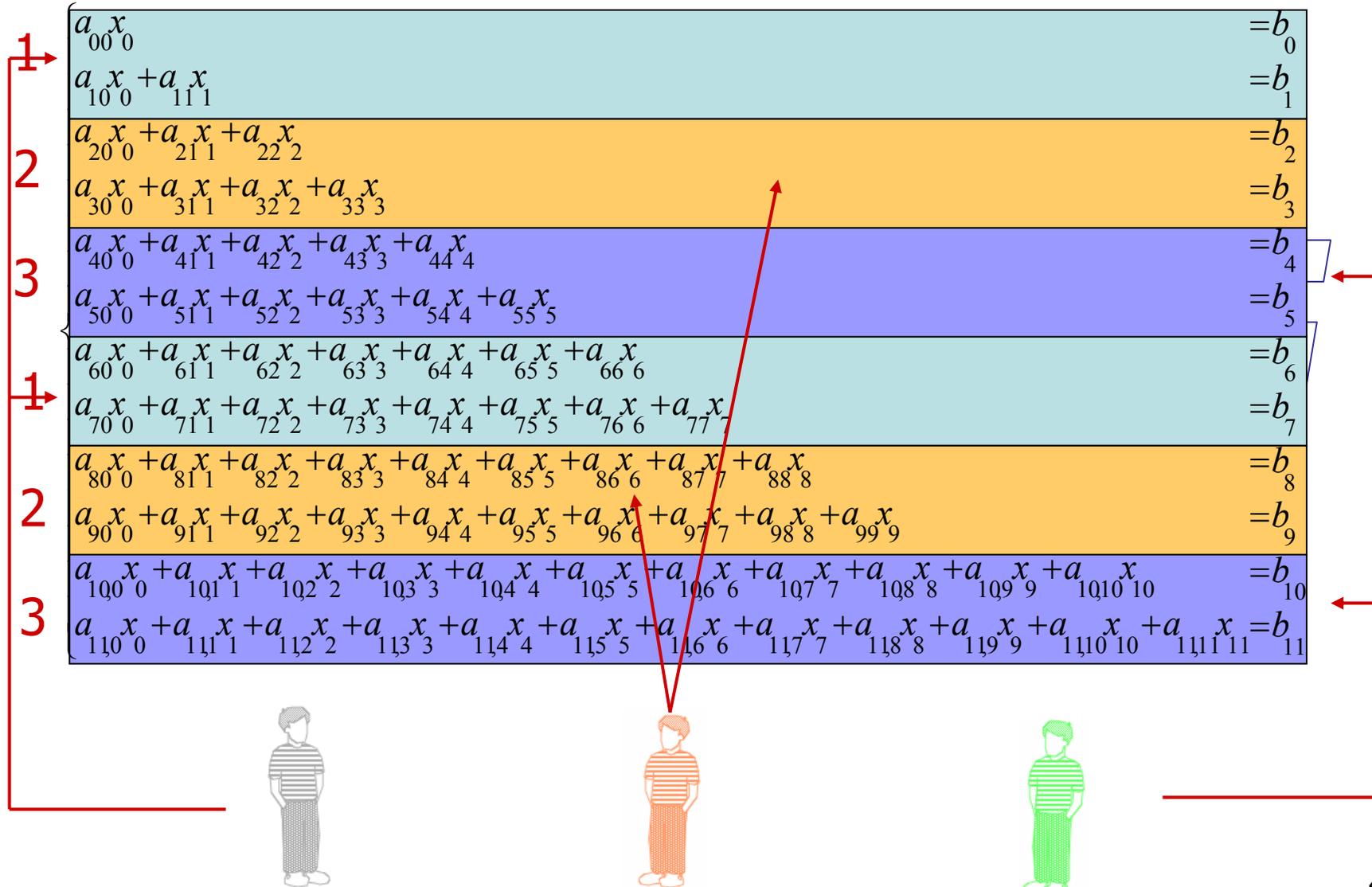
A causa della struttura della matrice e del workflow dell'algoritmo una distribuzione non **ciclica** induce un carico sui processori fortemente **sbilanciato**

Domanda ...

Cosa succede se distribuiamo i dati
ciclicamente tra i processori ?

III Strategia: Distribuzione **ciclica** per blocchi di righe

Consideriamo un sistema di dimensione $n=12$ e $p=3$ Studenti

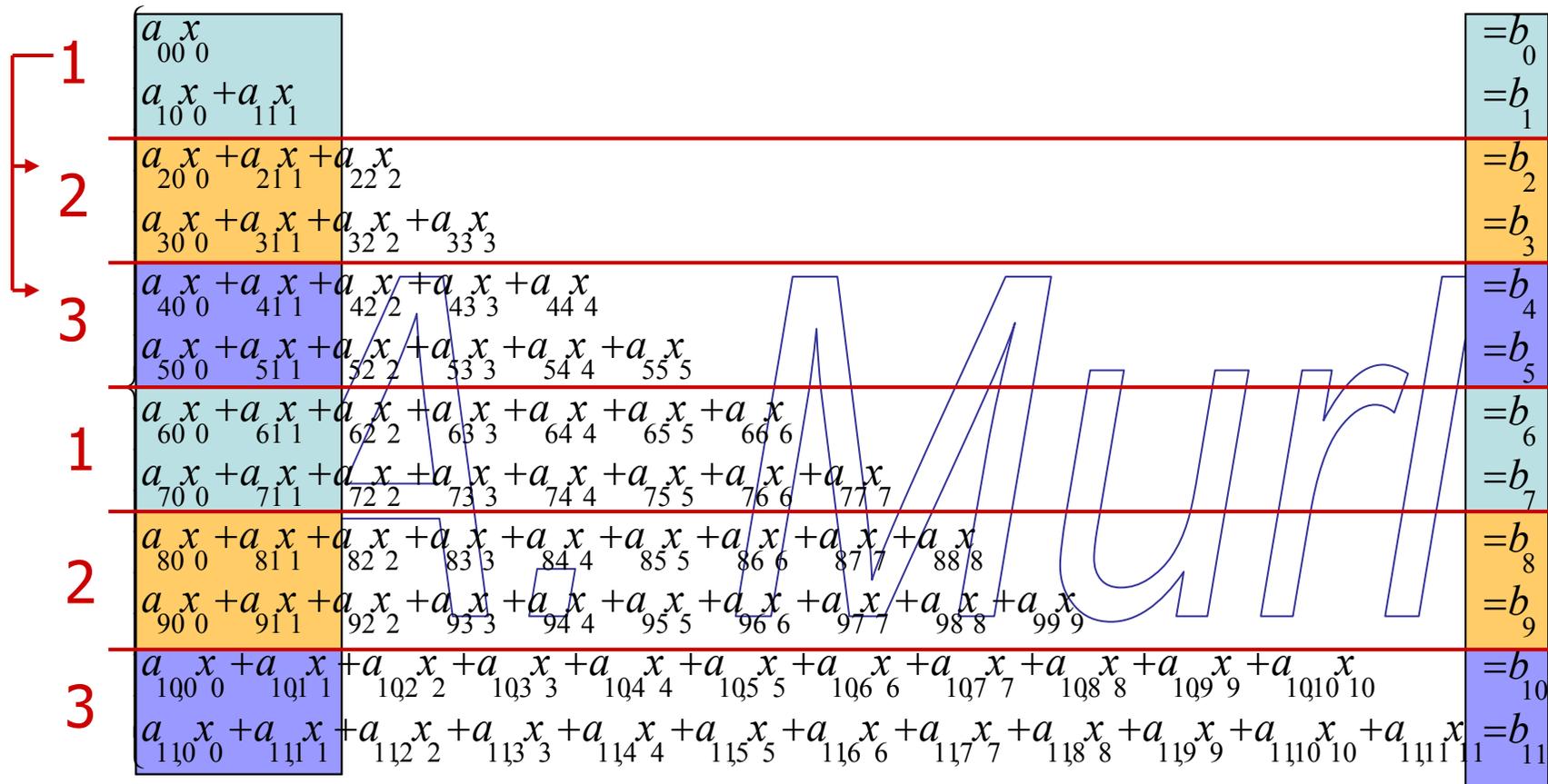


Calcolo Par Studente 1 o - A. Murli **Studente 2**

Studente 3

Passo 1 → { Studente 1: calcolo + spedizione a TUTTI
 TUTTI: aggiornamento

Parte attiva

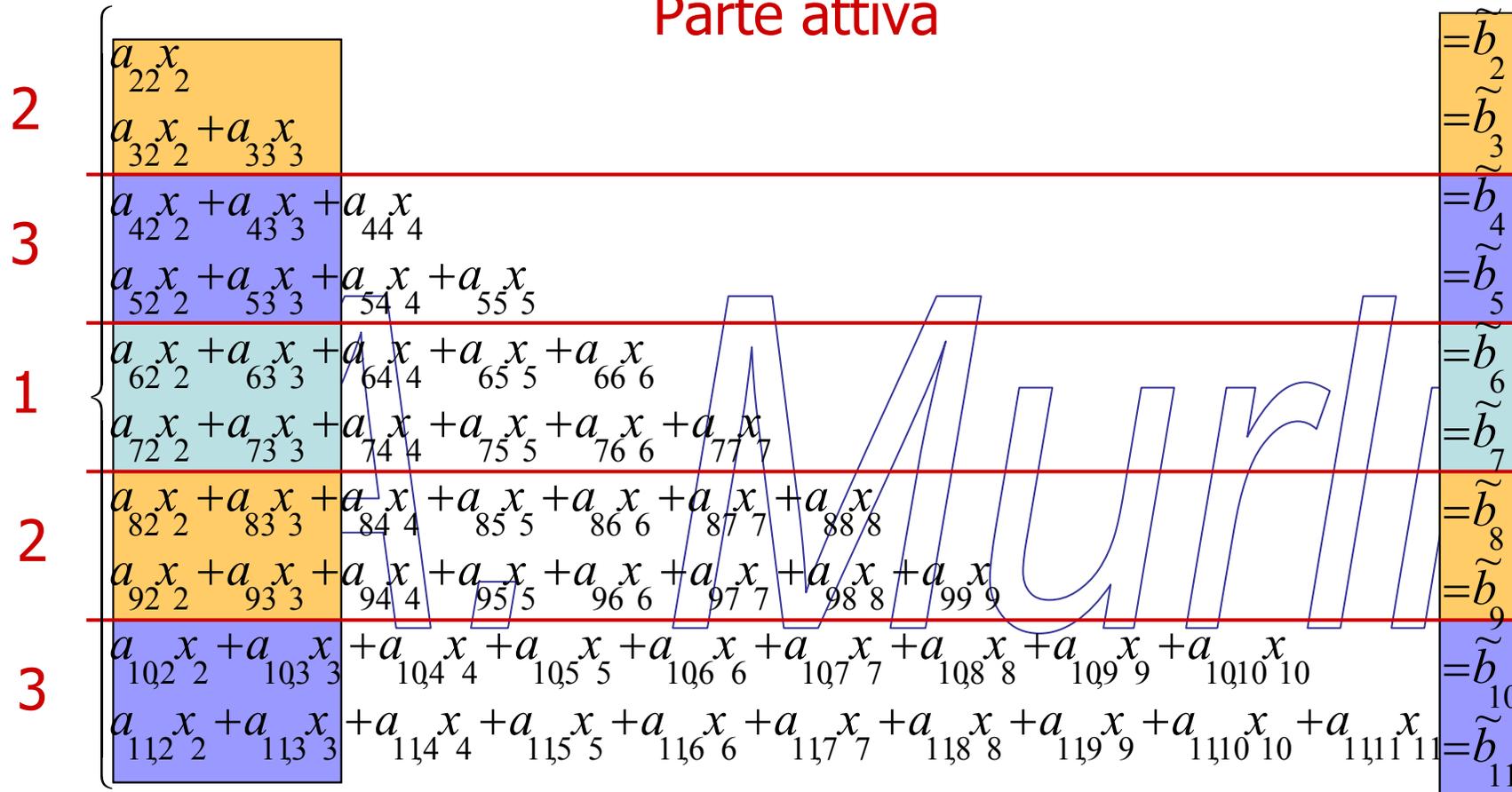


Lo **Studente 1** risolve il sistema triangolare inferiore e spedisce le componenti calcolate (x_0, x_1) agli altri studenti

TUTTI aggiornano le componenti del termine noto **b**

Passo 2 → { Studente 2: calcolo + spedizione a TUTTI
 TUTTI: aggiornamento

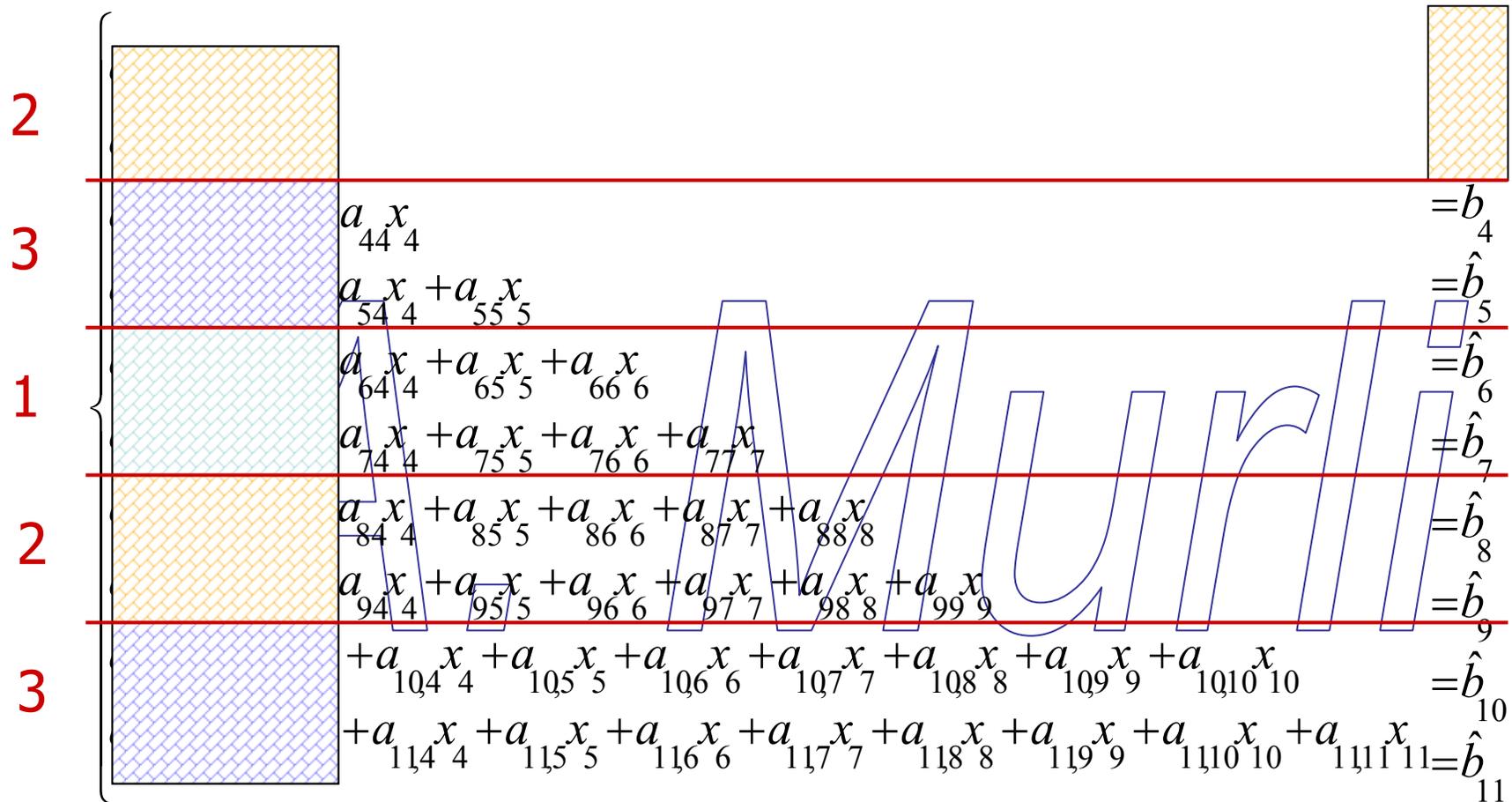
Parte attiva



Lo **Studente 2** risolve il sistema triangolare inferiore e spedisce le componenti calcolate (x_2, x_3) agli altri studenti

TUTTI aggiornano le componenti del termine noto **b**

Passo 2 → { Studente 2: calcolo + spedizione a TUTTI
 TUTTI: aggiornamento



Si ottiene il seguente Sistema Aggiornato

Passo 3 → { Studente 3: calcolo + spedizione a TUTTI
 TUTTI: aggiornamento

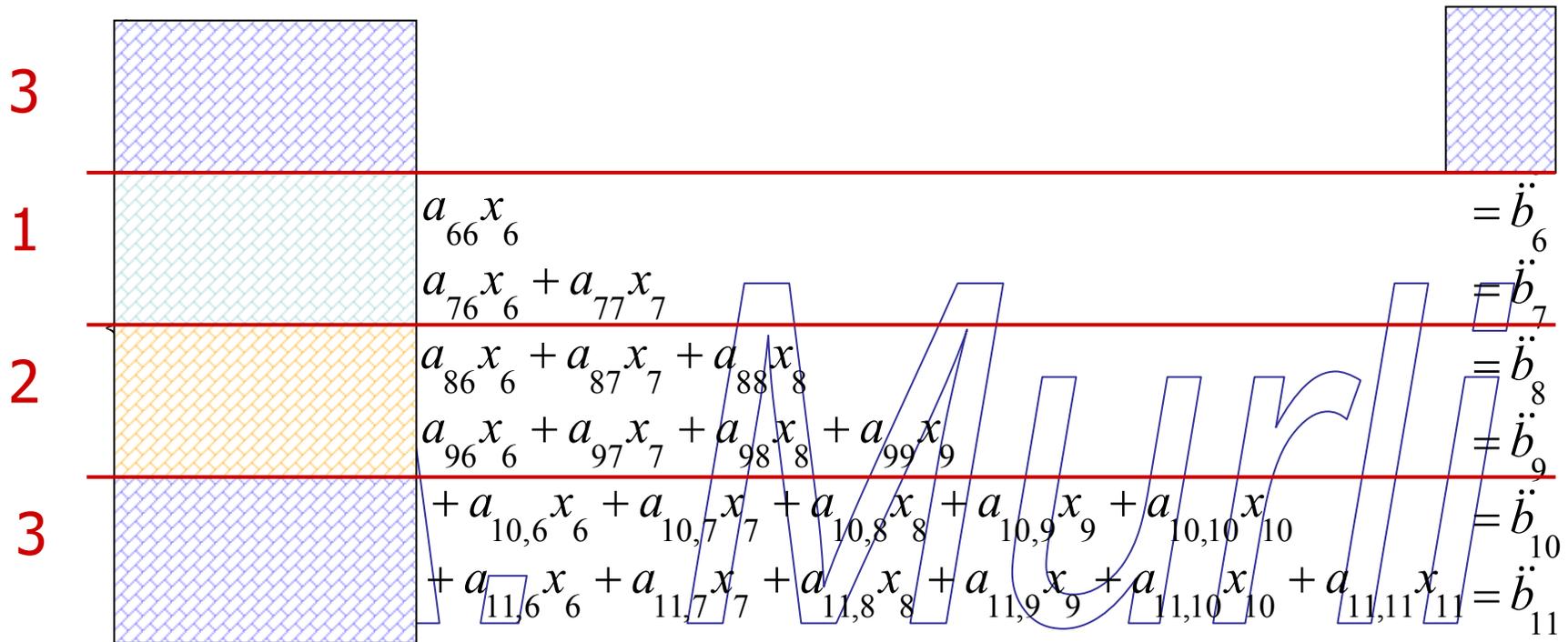
Parte attiva

3	$a_{44} x_4$										$= \hat{b}_4$
	$a_{54} x_4 + a_{55} x_5$										$= \hat{b}_5$
1	$a_{64} x_4 + a_{65} x_5 + a_{66} x_6$										$= \hat{b}_6$
	$a_{74} x_4 + a_{75} x_5 + a_{76} x_6 + a_{77} x_7$										$= \hat{b}_7$
2	$a_{84} x_4 + a_{85} x_5 + a_{86} x_6 + a_{87} x_7 + a_{88} x_8$										$= \hat{b}_8$
	$a_{94} x_4 + a_{95} x_5 + a_{96} x_6 + a_{97} x_7 + a_{98} x_8 + a_{99} x_9$										$= \hat{b}_9$
3	$a_{10,4} x_4 + a_{10,5} x_5 + a_{10,6} x_6 + a_{10,7} x_7 + a_{10,8} x_8 + a_{10,9} x_9 + a_{10,10} x_{10}$										$= \hat{b}_{10}$
	$a_{11,4} x_4 + a_{11,5} x_5 + a_{11,6} x_6 + a_{11,7} x_7 + a_{11,8} x_8 + a_{11,9} x_9 + a_{11,10} x_{10} + a_{11,11} x_{11}$										$= \hat{b}_{11}$

Lo **Studente 3** risolve il sistema triangolare inferiore e spedisce le componenti calcolate (x_4, x_5) agli altri studenti

TUTTI aggiornano le componenti del termine noto **b**

Passo 3 → { Studente 3: calcolo + spedizione a TUTTI
 TUTTI: aggiornamento



Si ottiene il seguente Sistema Aggiornato

Passo 4 → { Studente 1 : calcolo + spedizione a Studente 2,3
 Stud. 2,3 : aggiornamento

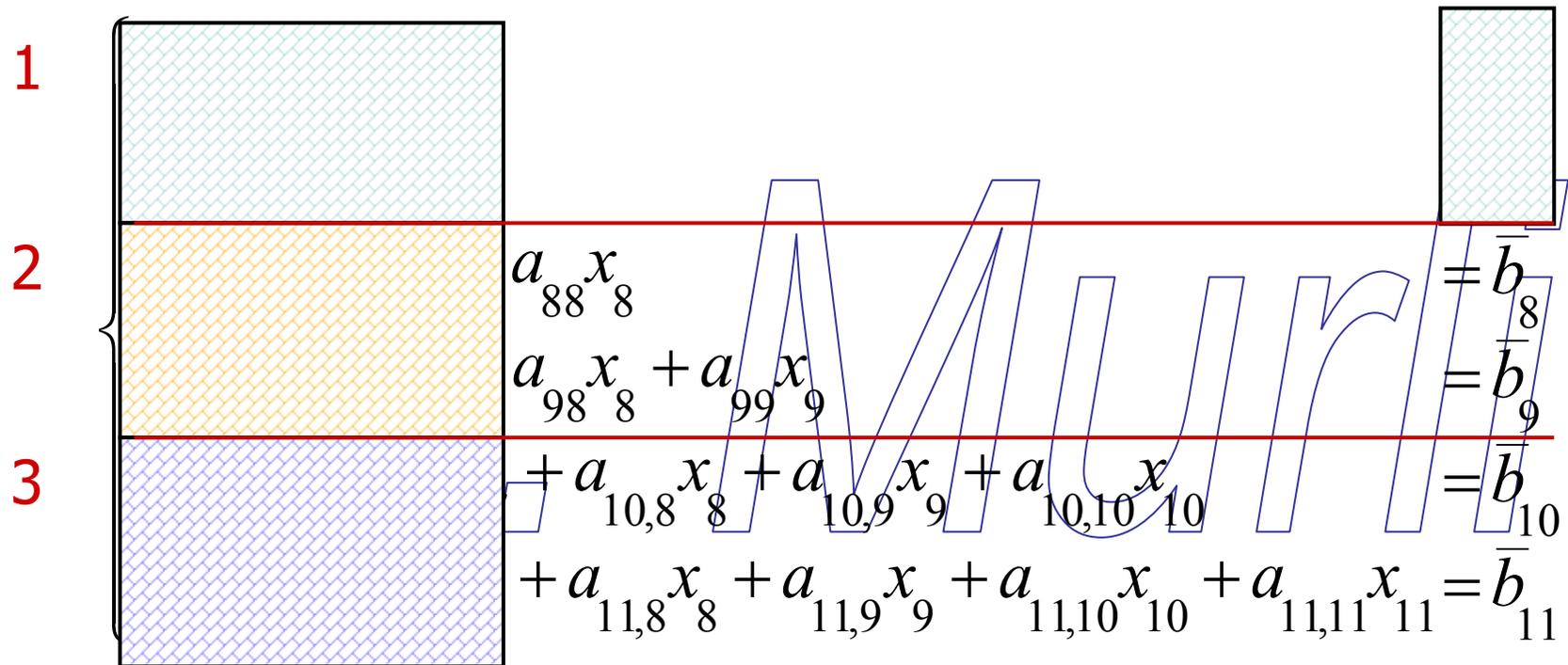
Parte attiva

1	$a_{66} x_6$	= \ddot{b}_6
	$a_{76} x_6 + a_{77} x_7$	
2	$a_{86} x_6 + a_{87} x_7 + a_{88} x_8$	= \ddot{b}_8
	$a_{96} x_6 + a_{97} x_7 + a_{98} x_8 + a_{99} x_9$	= \ddot{b}_9
3	$a_{10,6} x_6 + a_{10,7} x_7 + a_{10,8} x_8 + a_{10,9} x_9 + a_{10,10} x_{10}$	= \ddot{b}_{10}
	$a_{11,6} x_6 + a_{11,7} x_7 + a_{11,8} x_8 + a_{11,9} x_9 + a_{11,10} x_{10} + a_{11,11} x_{11}$	= \ddot{b}_{11}

Lo **Studente 1** risolve il sistema triangolare inferiore e spedisce le componenti calcolate (x_6, x_7) agli altri studenti

Gli **Studenti 2 e 3** aggiornano le componenti del termine noto **b**.

Passo 4 → { Studente 1 : calcolo + spedizione a Studente 2,3
 Stud. 2,3 : aggiornamento



Si ottiene il seguente Sistema Aggiornato

Passo 5 → { Studente 2 : calcolo + spedizione a Studente 3
Studente 3 : aggiornamento

Parte attiva

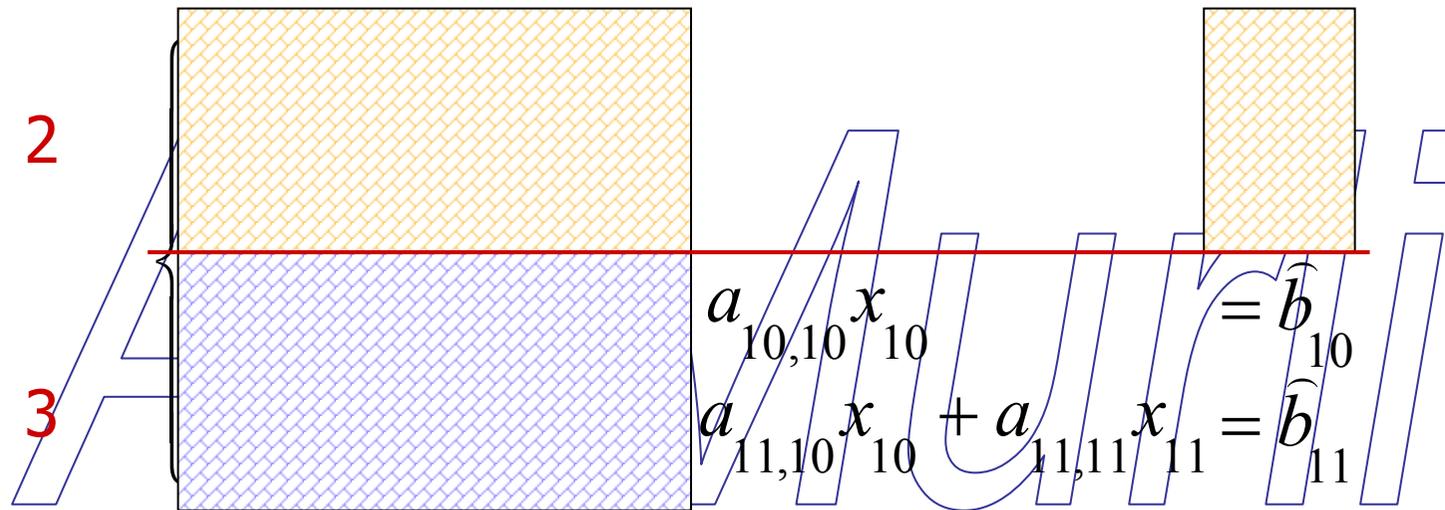
The diagram shows a linear system with two rows of equations. The first row is highlighted in orange and labeled '2'. The second row is highlighted in blue and labeled '3'. A red horizontal line separates the two rows. The equations are:

$$\begin{array}{l} a_{88} x_8 \\ a_{98} x_8 + a_{99} x_9 \\ a_{10,8} x_8 + a_{10,9} x_9 + a_{10,10} x_{10} \\ a_{11,8} x_8 + a_{11,9} x_9 + a_{11,10} x_{10} + a_{11,11} x_{11} \end{array} = \begin{array}{l} \bar{b}_8 \\ \bar{b}_9 \\ \bar{b}_{10} \\ \bar{b}_{11} \end{array}$$

Lo **Studente 2** risolve il sistema triangolare inferiore e spedisce le componenti calcolate (x_8, x_9) solo allo **studente 3**

Lo **Studente 3** aggiorna le componenti del termine noto **b**.

Passo 5 → {
 Studente 2 : calcolo + spedizione a Studente 3
 Studente 3 : aggiornamento



Si ottiene il seguente Sistema Aggiornato

Passo 6 → Studente 3: calcolo

Parte attiva

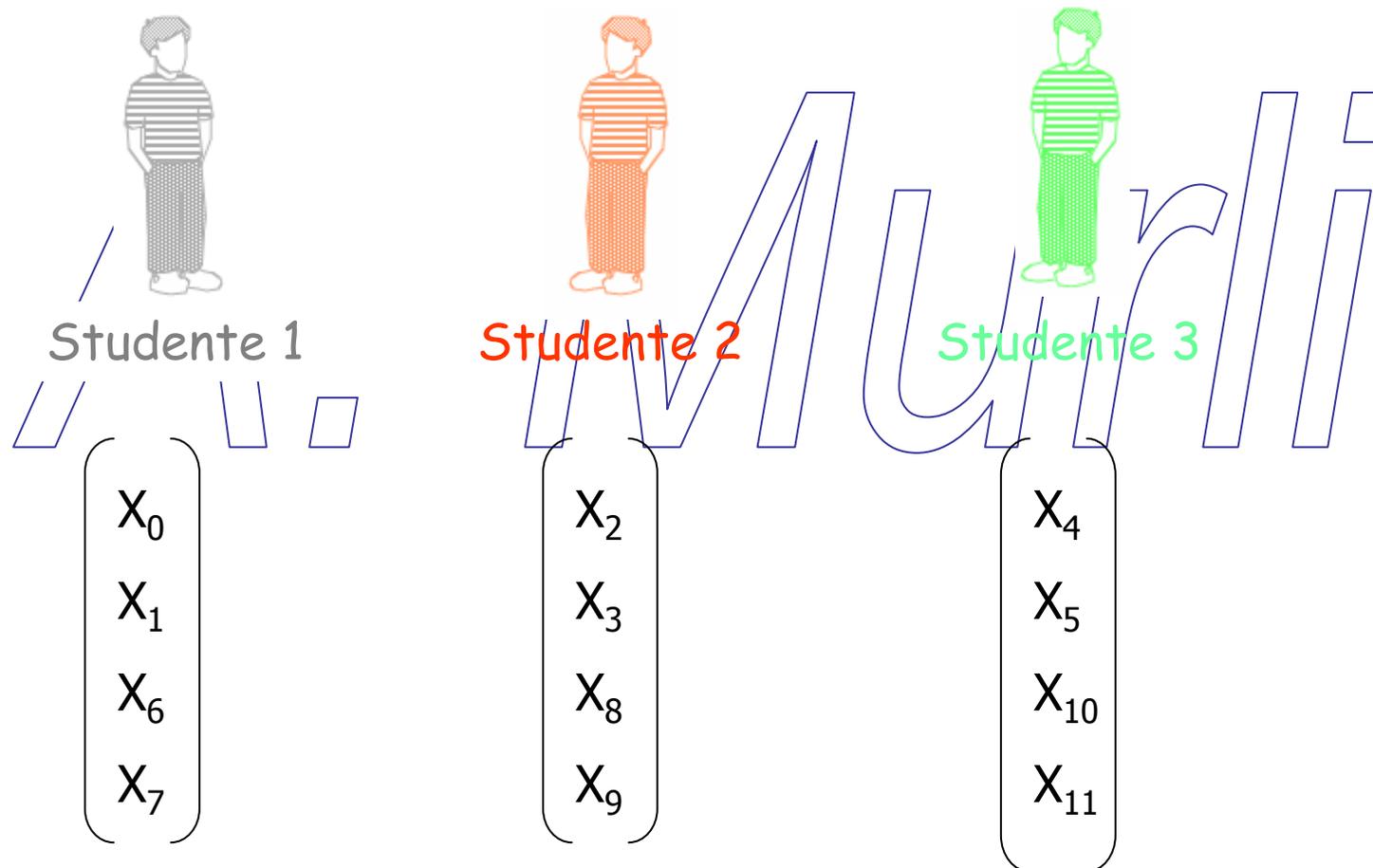
3

$$\begin{cases} a_{10,10} x_{10} = \hat{b}_{10} \\ a_{11,10} x_{10} + a_{11,11} x_{11} = \hat{b}_{11} \end{cases}$$

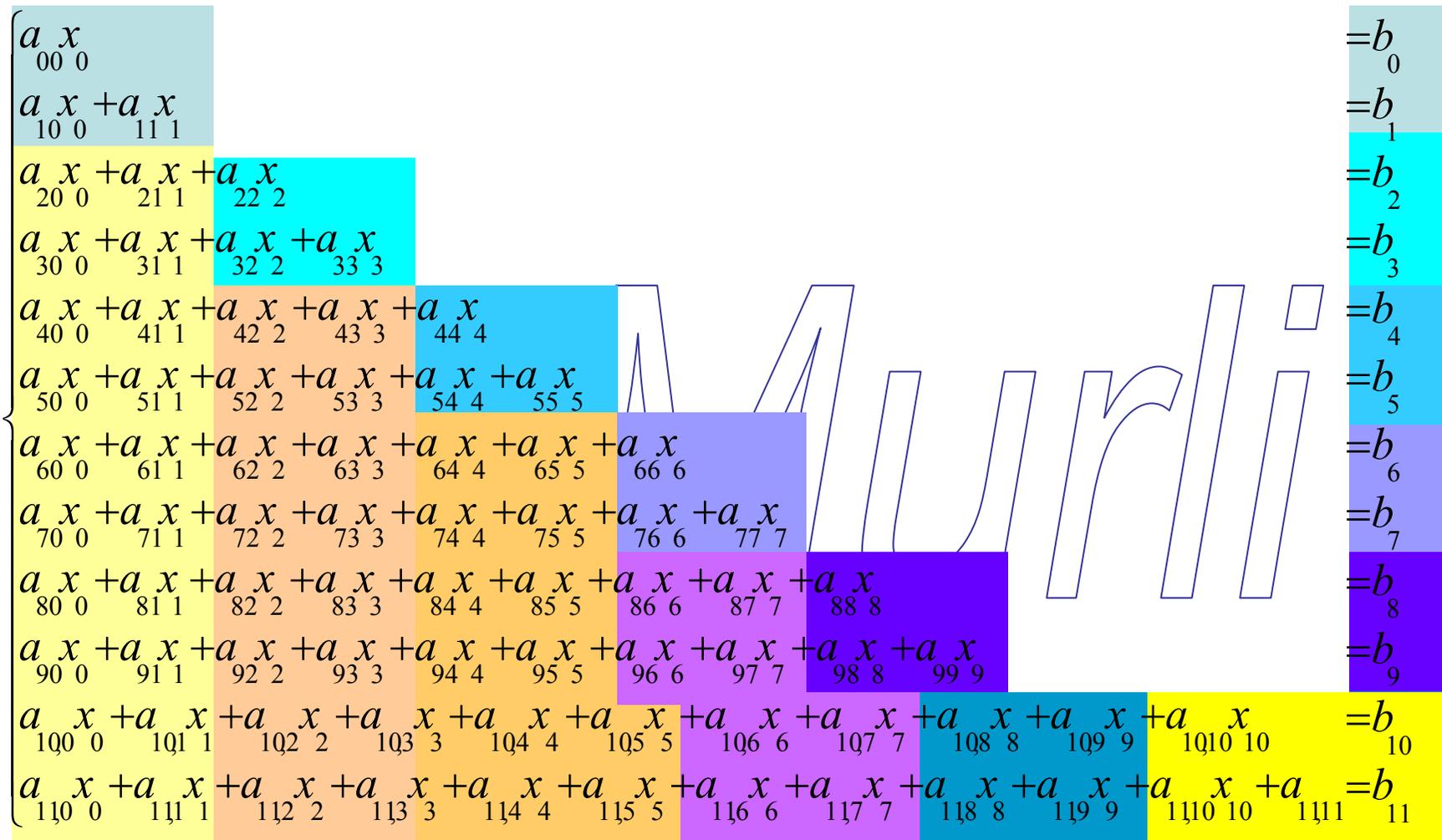
Lo **studente 3** risolve il sistema triangolare inferiore calcolando le componenti (x_{10}, x_{11})

III Strategia: Distribuzione **ciclica** per blocchi di righe

La soluzione è così distribuita

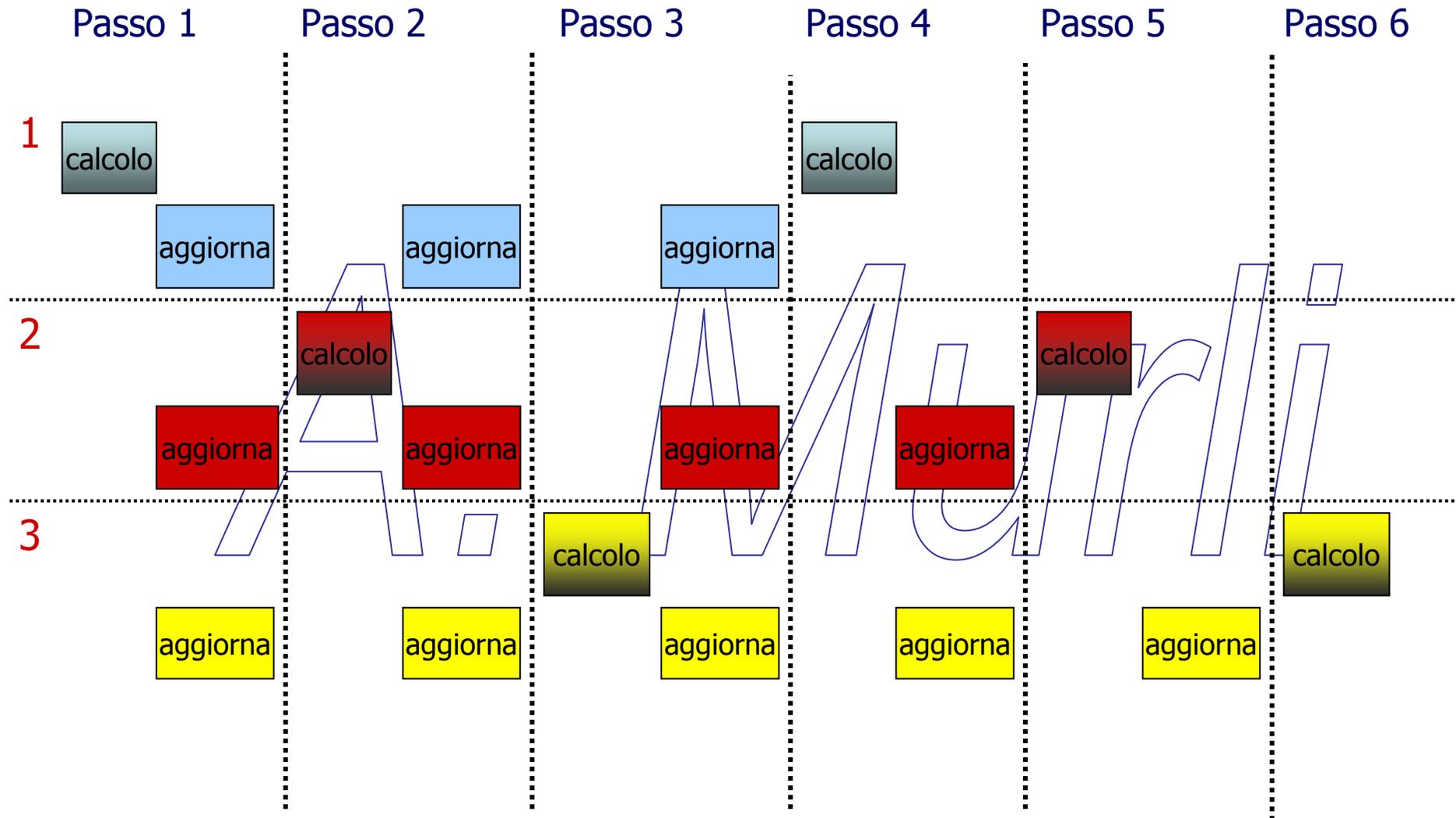


III Strategia: riassumendo



Si aggiorna

Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



III Strategia:

Distribuendo **ciclicamente** la matrice tra i processori

migliora **il bilanciamento del carico**

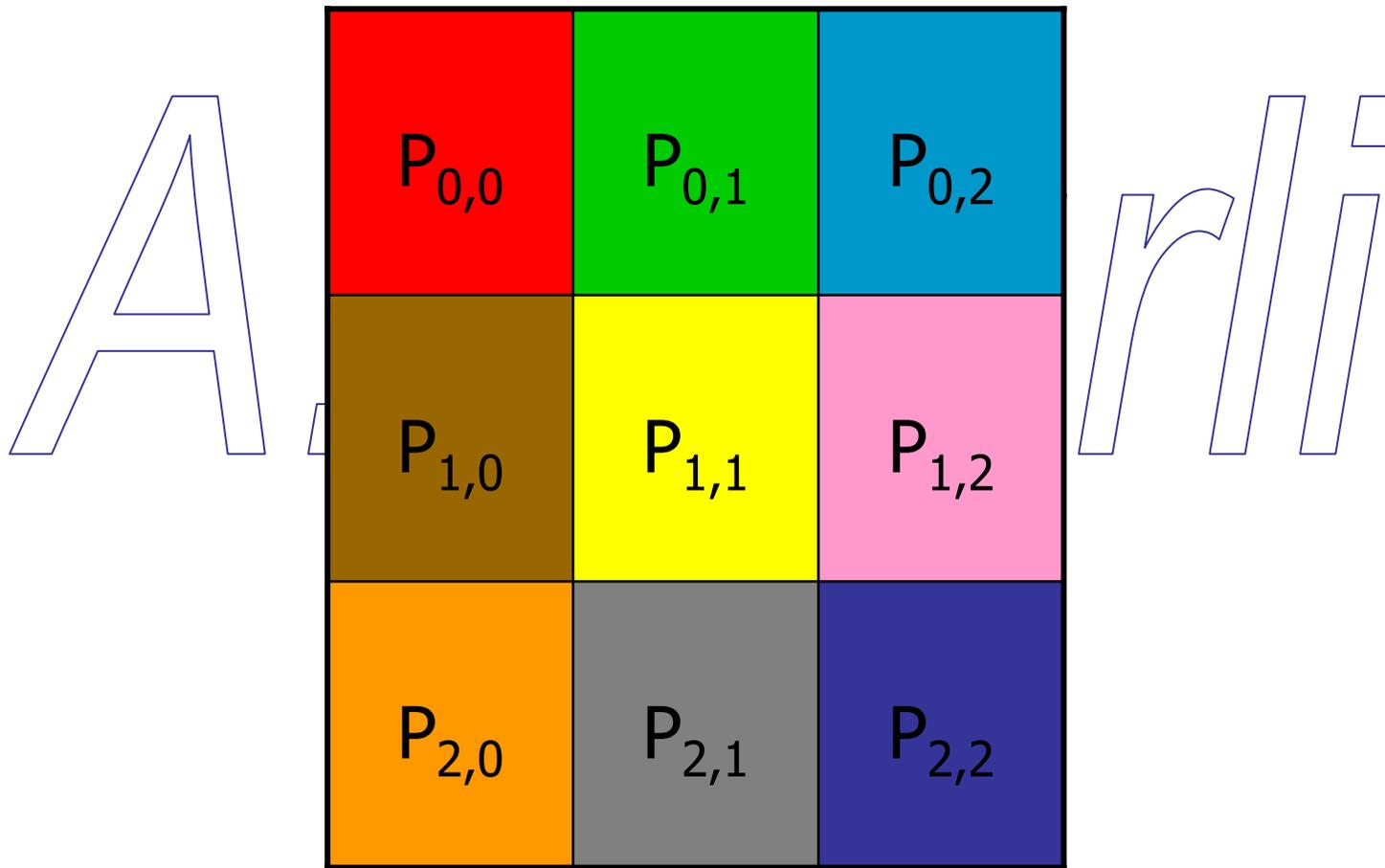
Infatti

In questo modo **il workload** si adatta

meglio al **workflow** dell'algoritmo

IV Strategia: distribuzione ciclica lungo le righe e le colonne (2D)

Consideriamo una griglia cartesiana di dimensione 3X3
periodica lungo le righe



IV Strategia

Consideriamo il sistema

$$A * x = b$$

con A matrice triangolare inferiore, appartenente ad $\mathbb{R}^{n \times n}$
e suddivisa in 6×6 blocchi $A_{i,j}$ di dimensione $n_b \times n_b$

I blocchi $A_{i,j}$ in rosso
sono matrici
identicamente nulle

$A =$

I blocchi $A_{i,i}$
in blu sono matrici
Triangolari Inferiori

$A_{0,0}$	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$	$A_{0,4}$	$A_{0,5}$
$A_{1,0}$	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{1,5}$
$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{2,5}$
$A_{3,0}$	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$	$A_{3,4}$	$A_{3,5}$
$A_{4,0}$	$A_{4,1}$	$A_{4,2}$	$A_{4,3}$	$A_{4,4}$	$A_{4,5}$
$A_{5,0}$	$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$

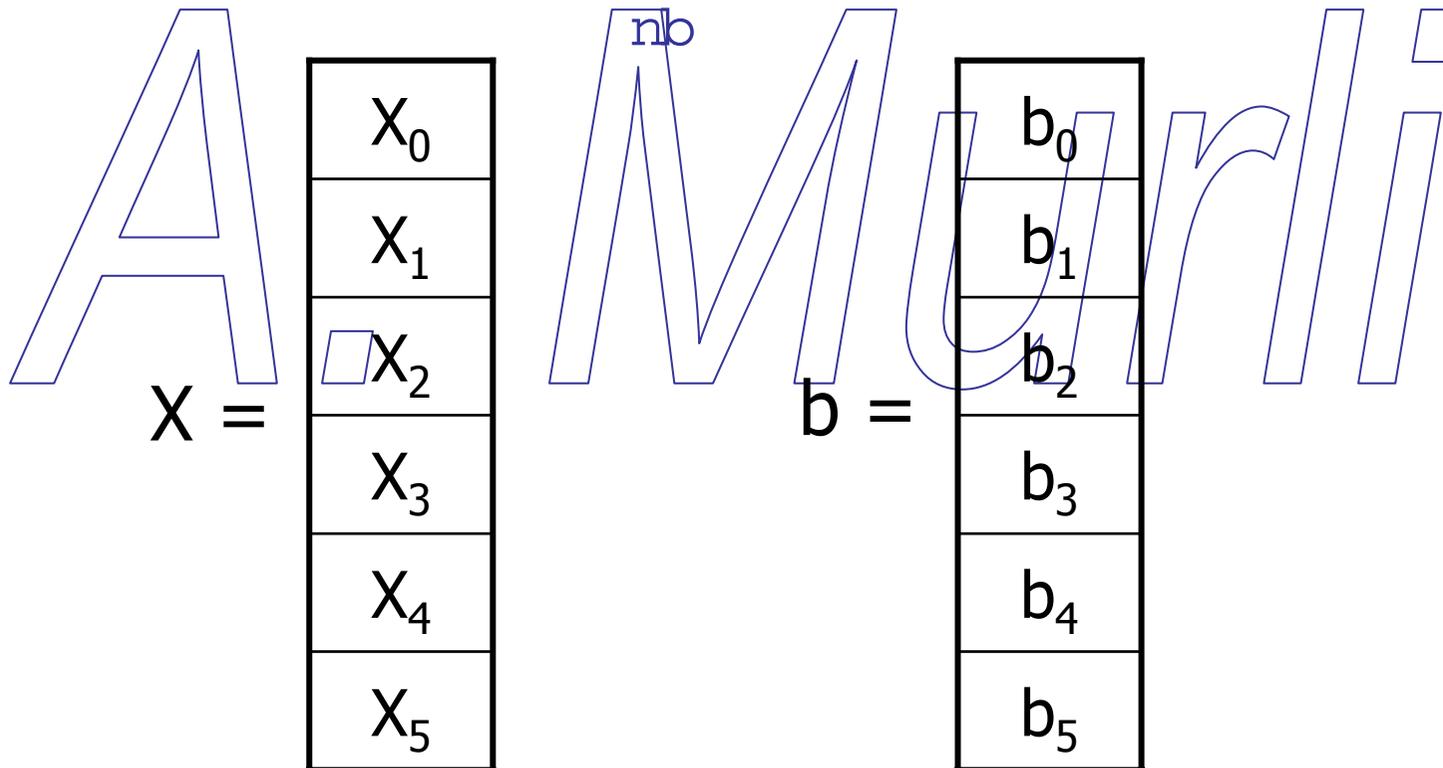
60

IV Strategia

Nel sistema

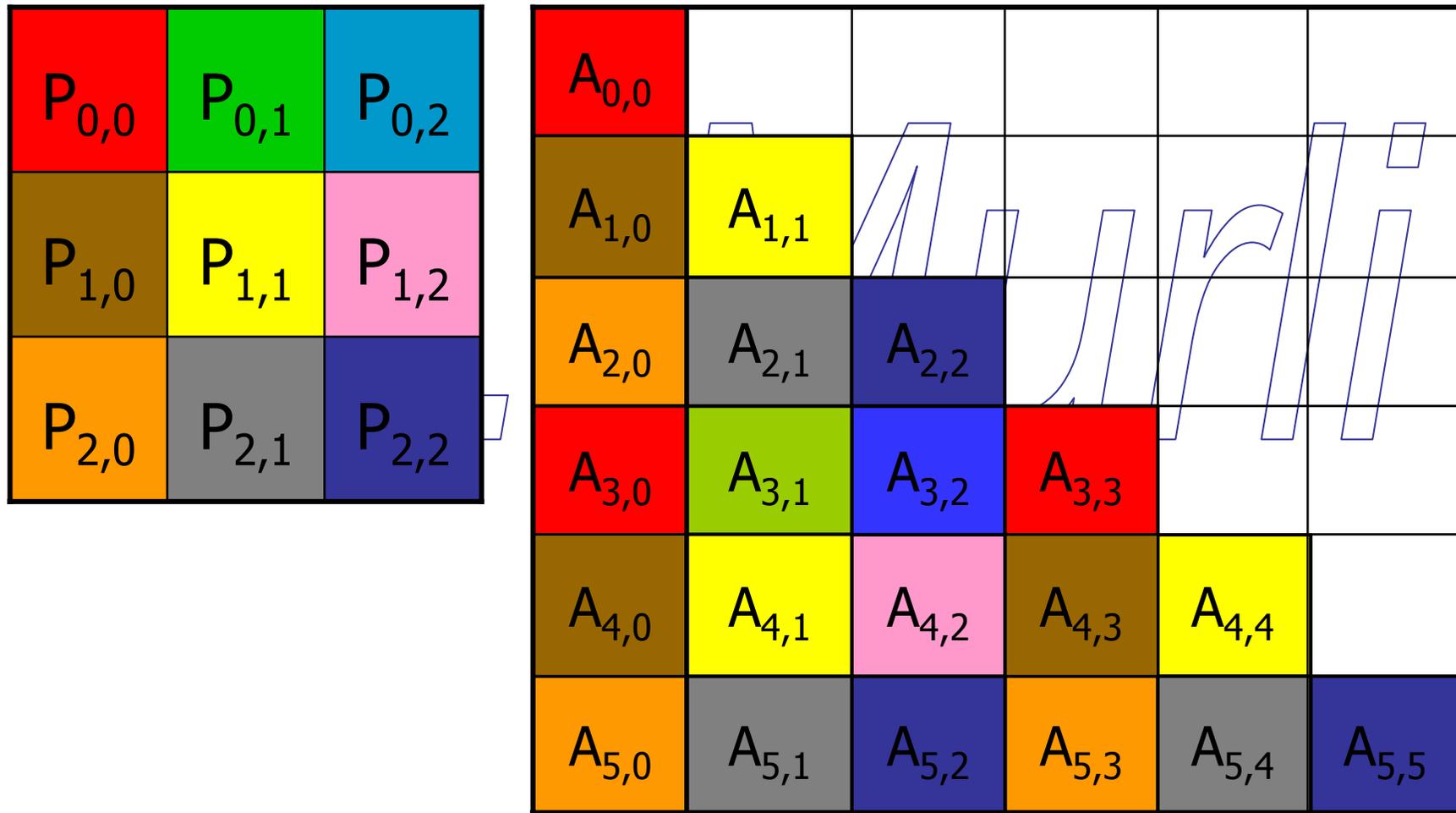
$$A*x = b$$

x e b sono vettori appartenenti ad \mathbb{R}^n
e suddivisi in 6 blocchi di dimensione



IV Strategia: distribuzione

Distribuiamo i blocchi di A tra i processori della griglia cartesiana applicando una **Distribuzione Ciclica 2D**



IV Strategia:

La distribuzione Ciclica 2D è utilizzata nelle routine di **ScaLapack** che risolvono sistemi lineari triangolari in parallelo.

Questa scelta garantisce **l'uniformità** con le routine che agiscono sui dati prima/dopo la risoluzione del sistema.

Ad esempio:

Per risolvere un generico sistema lineare si possono considerare 2 Fasi:

Fase 1 - Applicare prima la fattorizzazione LU della matrice del sistema
(**Distribuzione ciclica 2-D**)

Fase 2 - Applicare una Forward ed una Backword substitution ai sistemi ottenuti al passo precedente (**Distribuzione ciclica 2-D**).

In questo modo abbiamo due vantaggi:

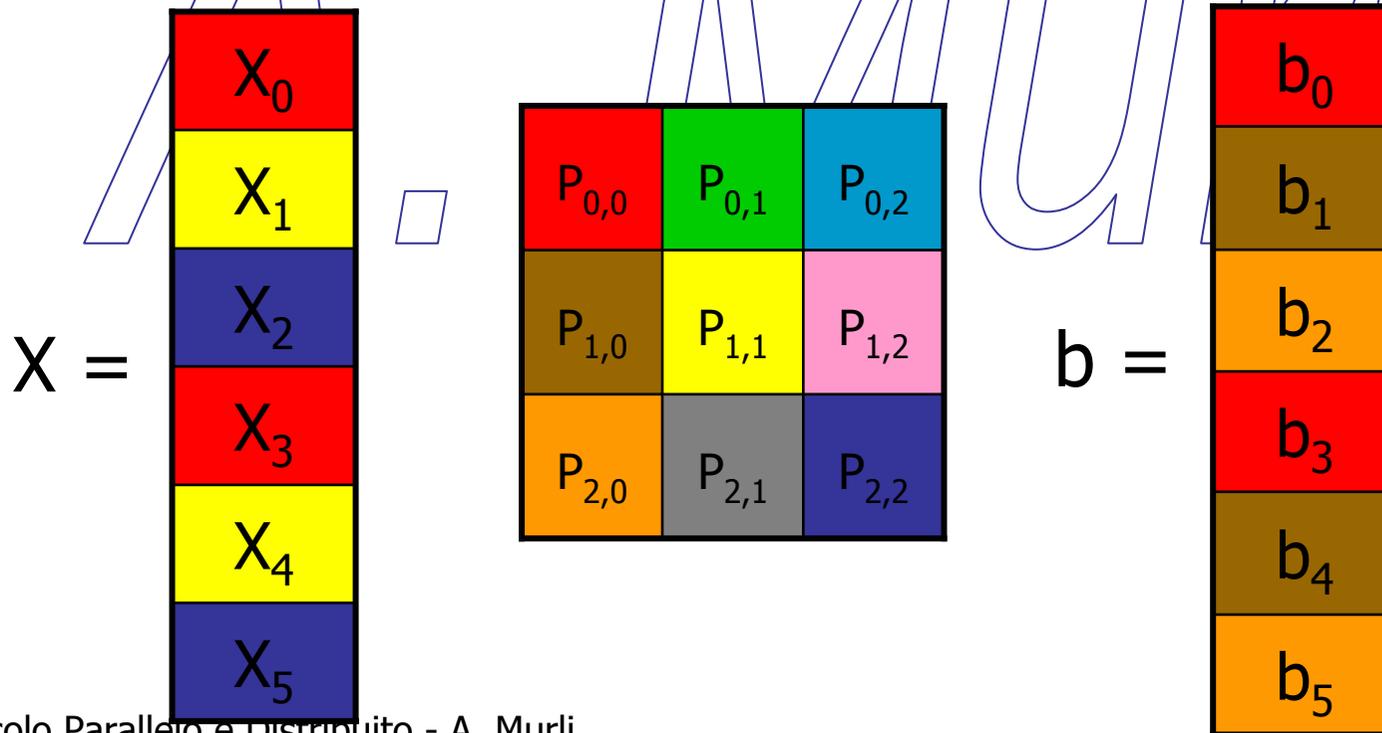
- 1- I dati non devono essere ridistribuiti nel passare dalla Fase 1 alla Fase 2;
- 2- Nell'applicare una Backward e poi una Farward substituion il bilanciamento del carico è ottimizzato.

IV Strategia: distribuzione II

Distribuiamo i blocchi di x e di b tra i processori della griglia cartesiana

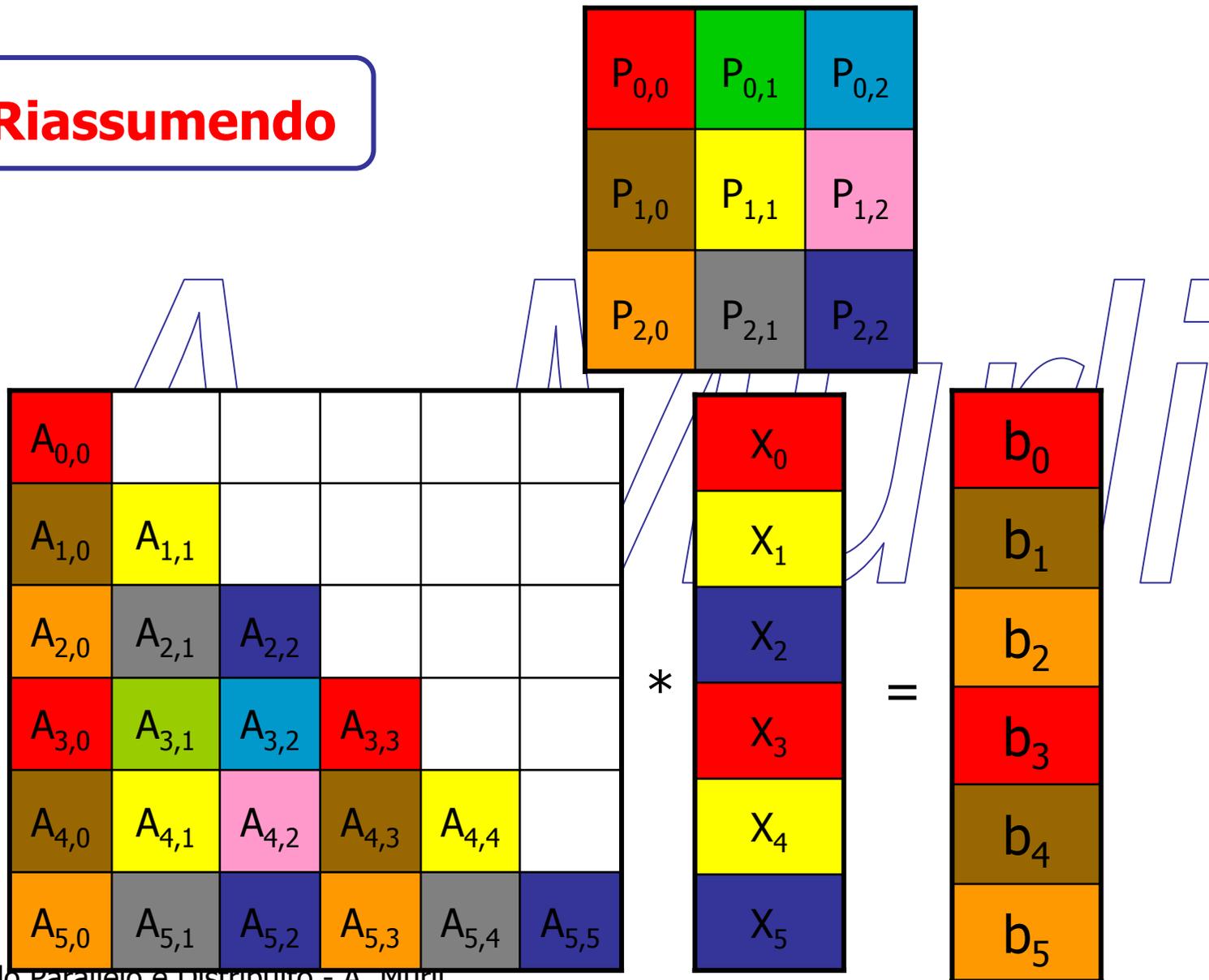
Distribuiamo ciclicamente i blocchi di X tra i processori della diagonale principale della griglia cartesiana

Distribuiamo ciclicamente i blocchi di b lungo la prima colonna della griglia cartesiana

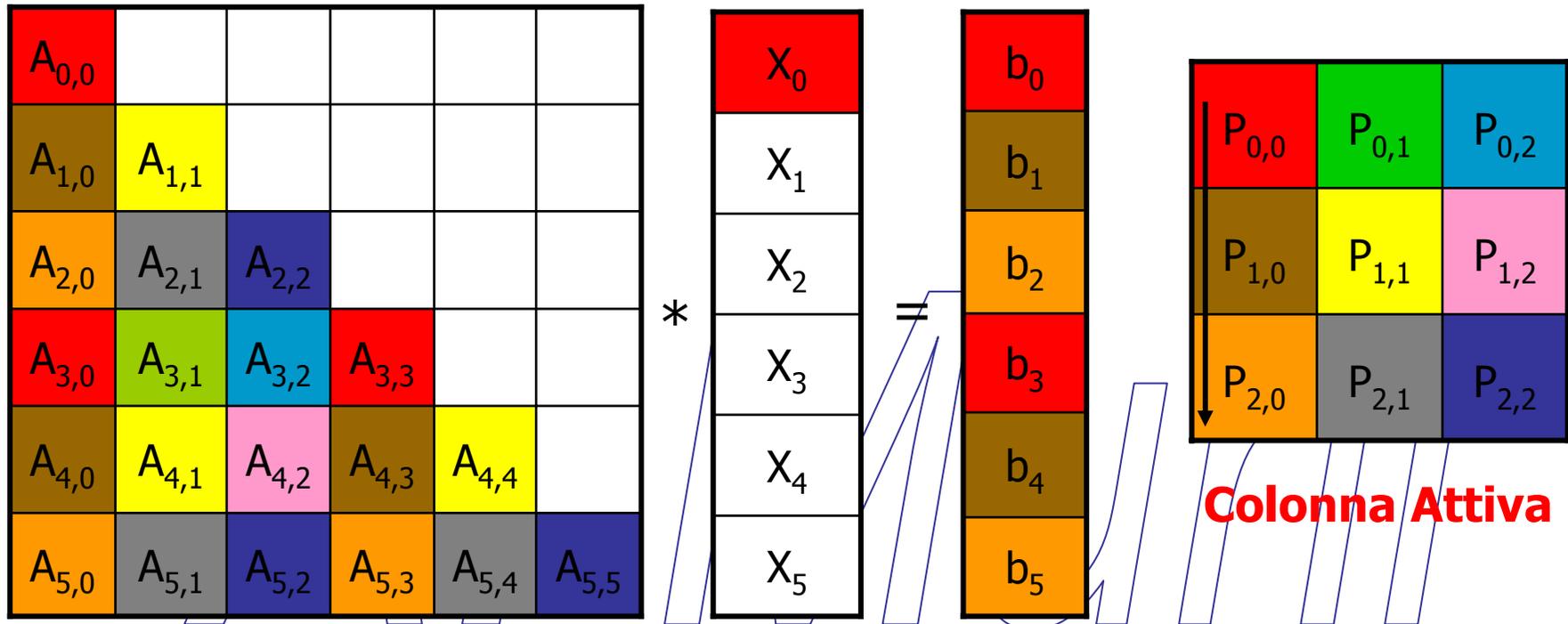


IV Strategia: distribuzione dati

Riassumendo



Passo 1 $\rightarrow P_{0,0}$: calcolo + spedizione

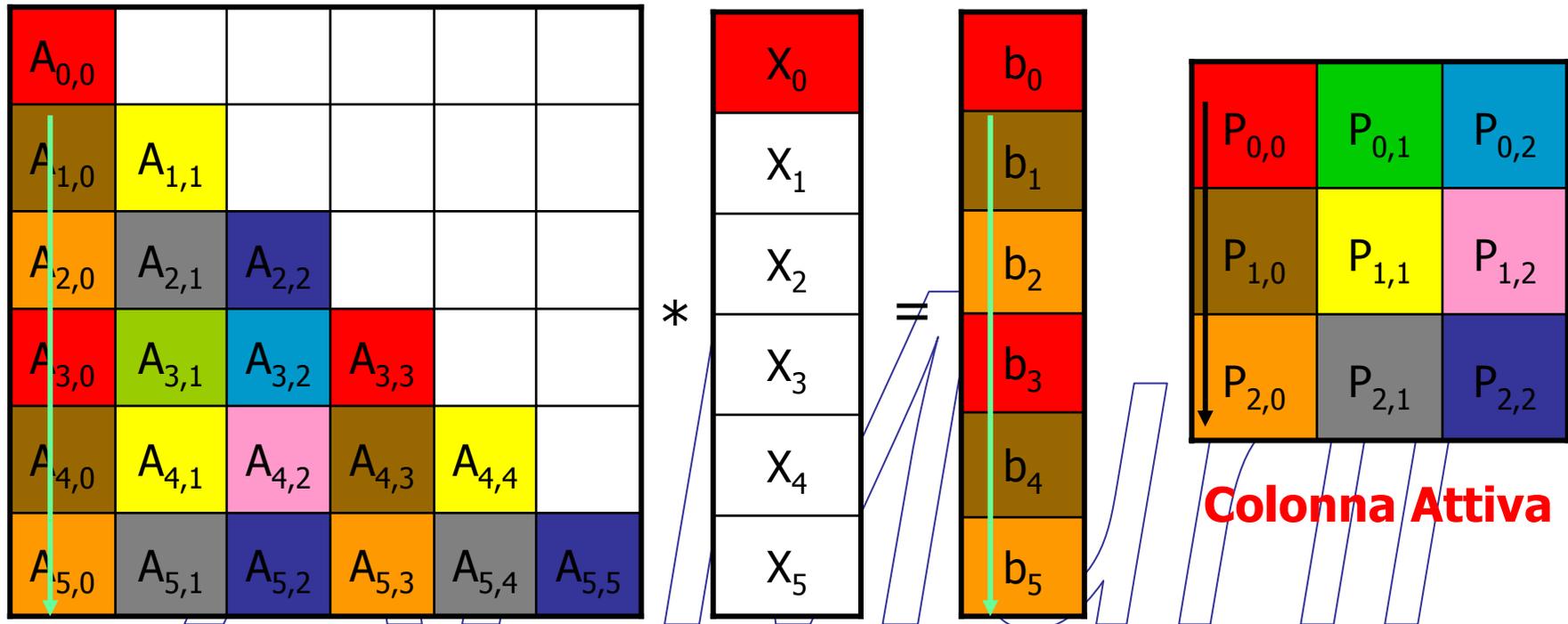


Il Processore $P_{0,0}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{0,0} * x_0 = b_0$$

Il Processore $P_{0,0}$ invia il blocco x_0 a tutti i processori $P_{i,0}$ appartenenti alla propria colonna della griglia (Colonna Attiva)

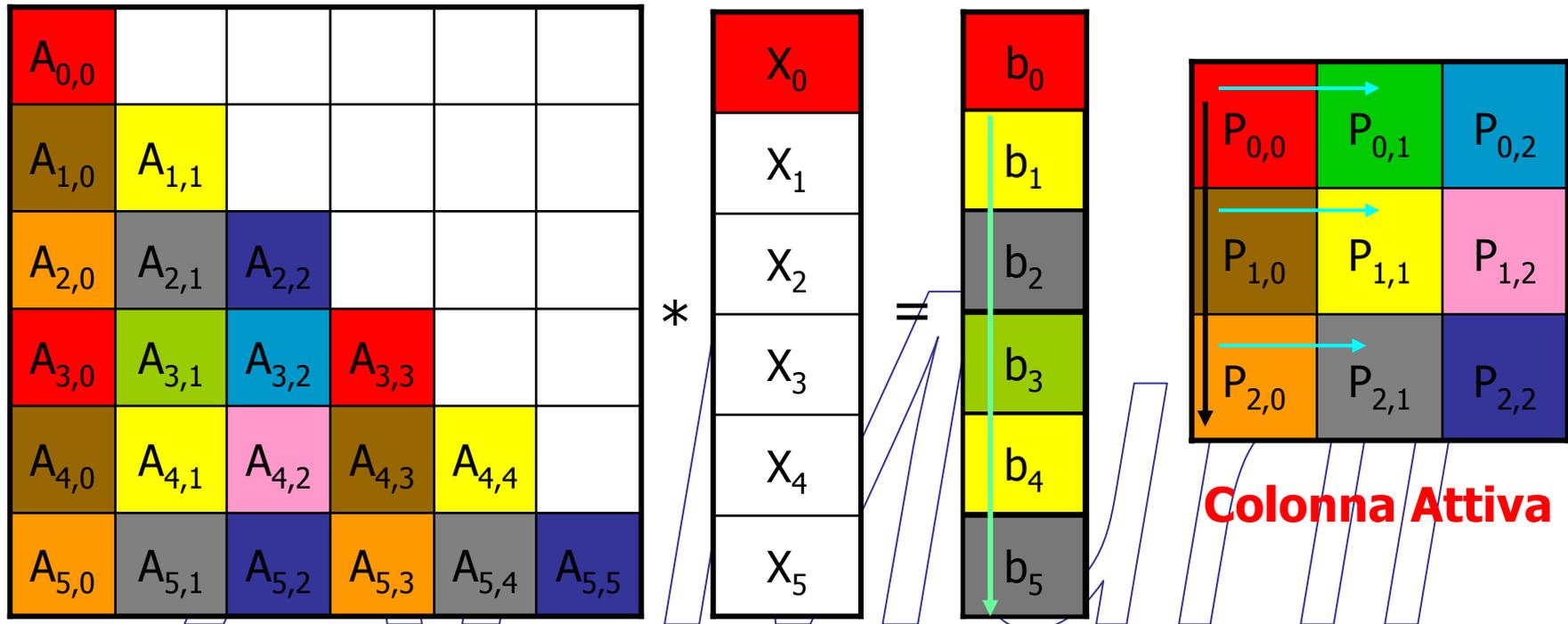
Passo 1 $\rightarrow P_{i,0}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$ aggiornano
le componenti del vettore dei termini noti:

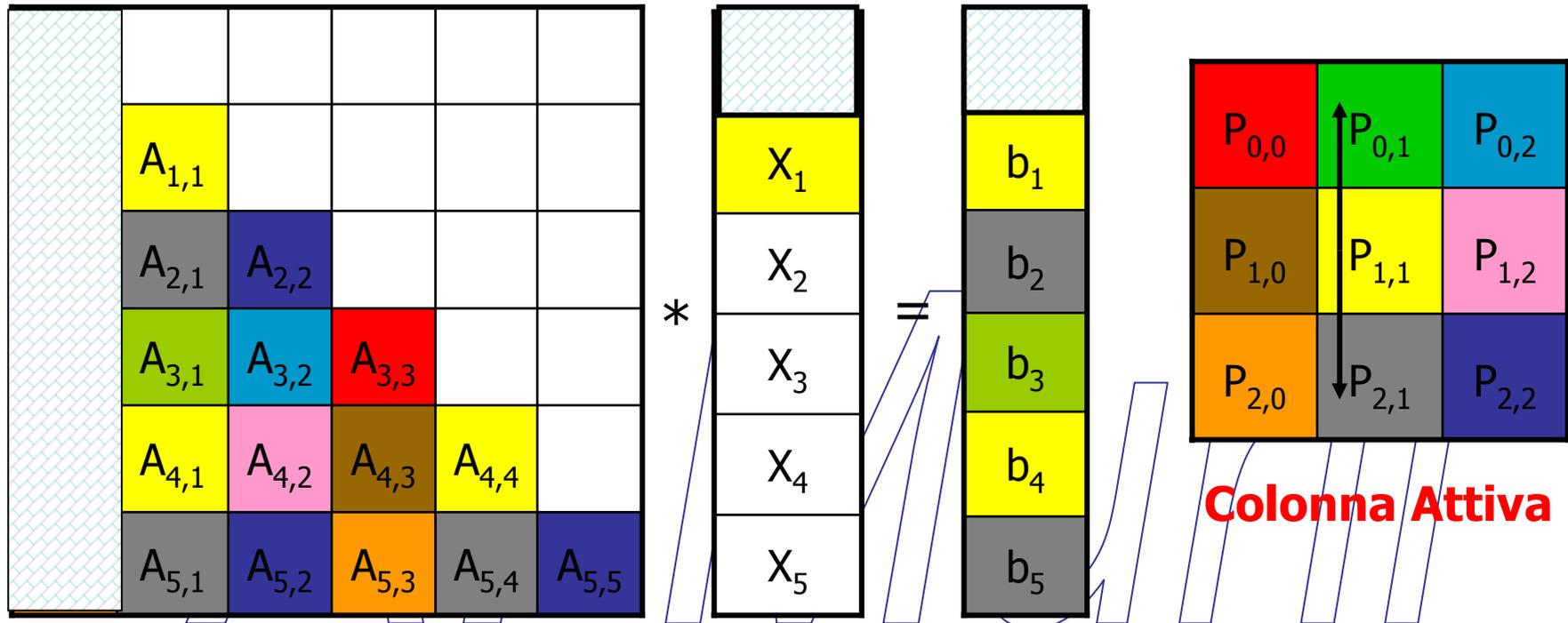
$$b_j = b_j - A_{j,0} * x_0 \text{ con } 0 < j < 6$$

Passo 1 $\rightarrow P_{i,0}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$ inviano
 le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
 ai processori che seguono nella propria riga della griglia.

Passo 2 $\rightarrow P_{1,1}$: calcolo + spedizione

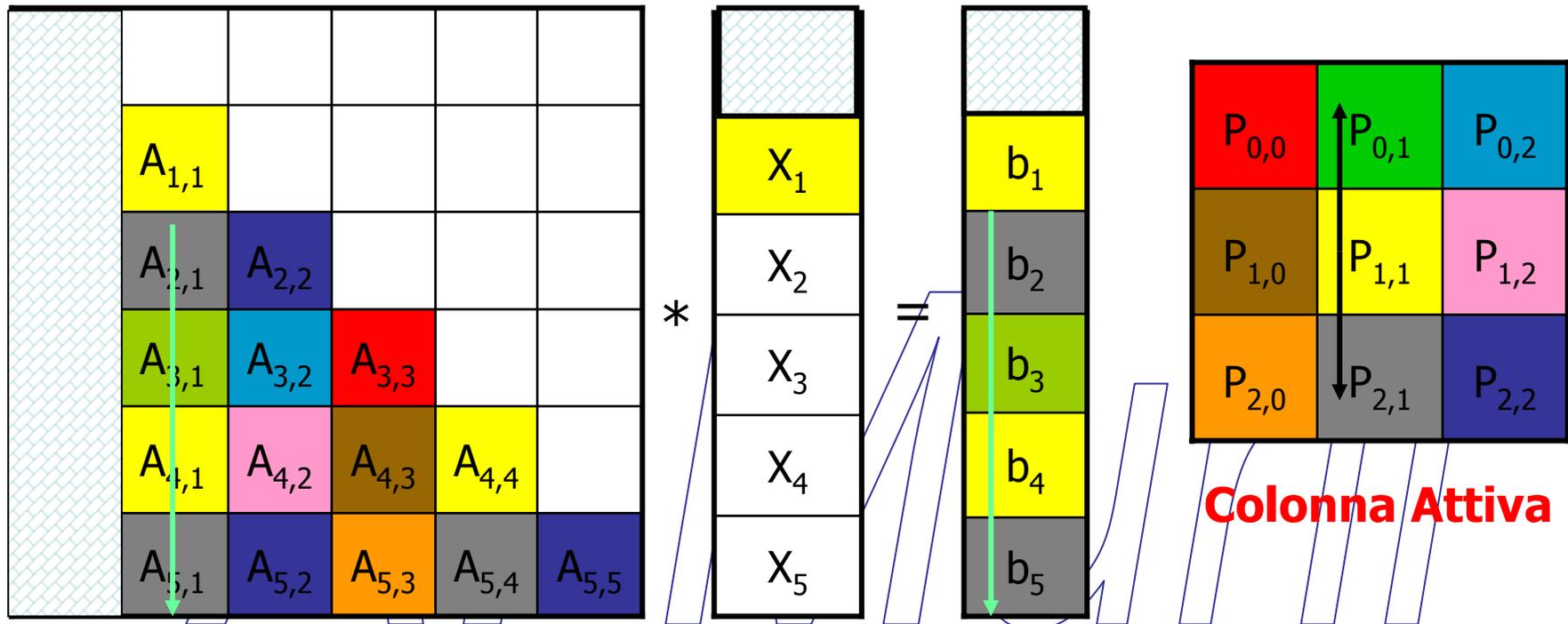


Il Processore $P_{1,1}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{1,1} * x_1 = b_1$$

Il Processore $P_{1,1}$ invia il blocco x_1 a tutti i processori $P_{i,1}$ appartenenti alla propria colonna della griglia (Colonna Attiva)

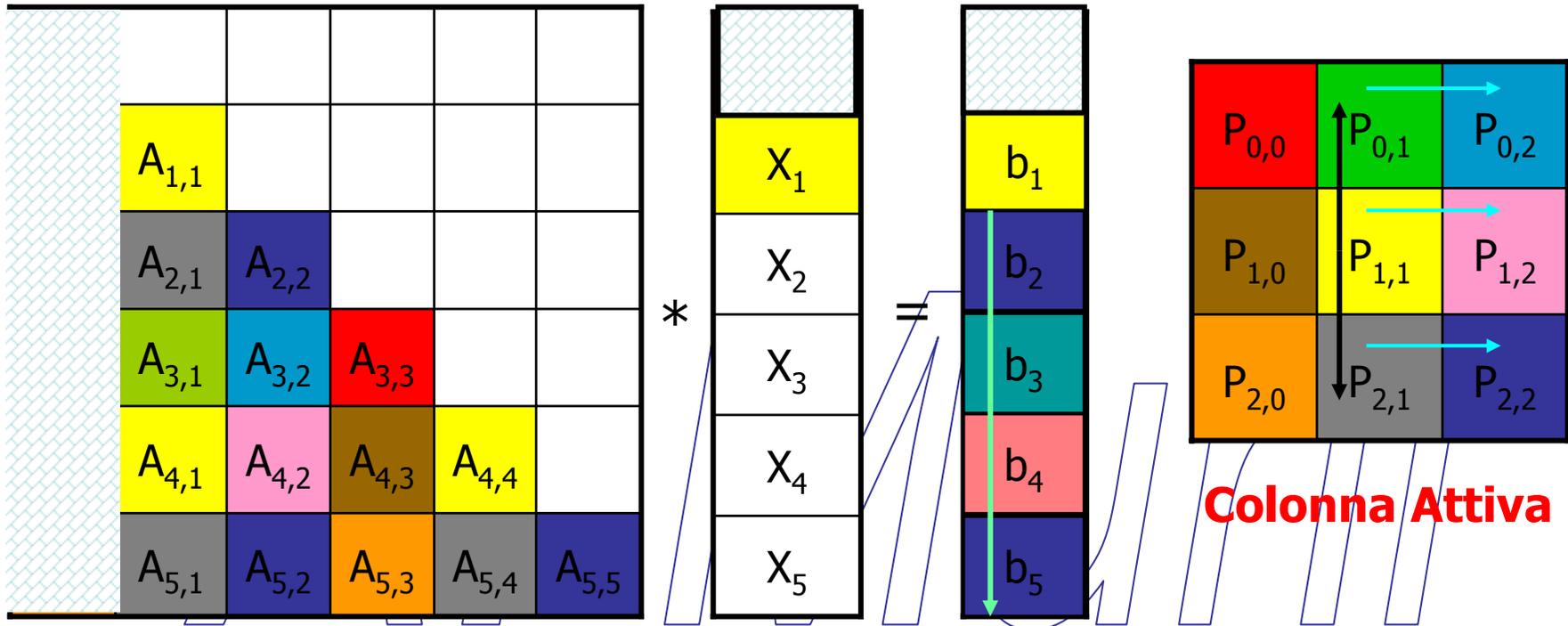
Passo 2 $\rightarrow P_{i,1}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ aggiornano
le componenti del vettore dei termini noti:

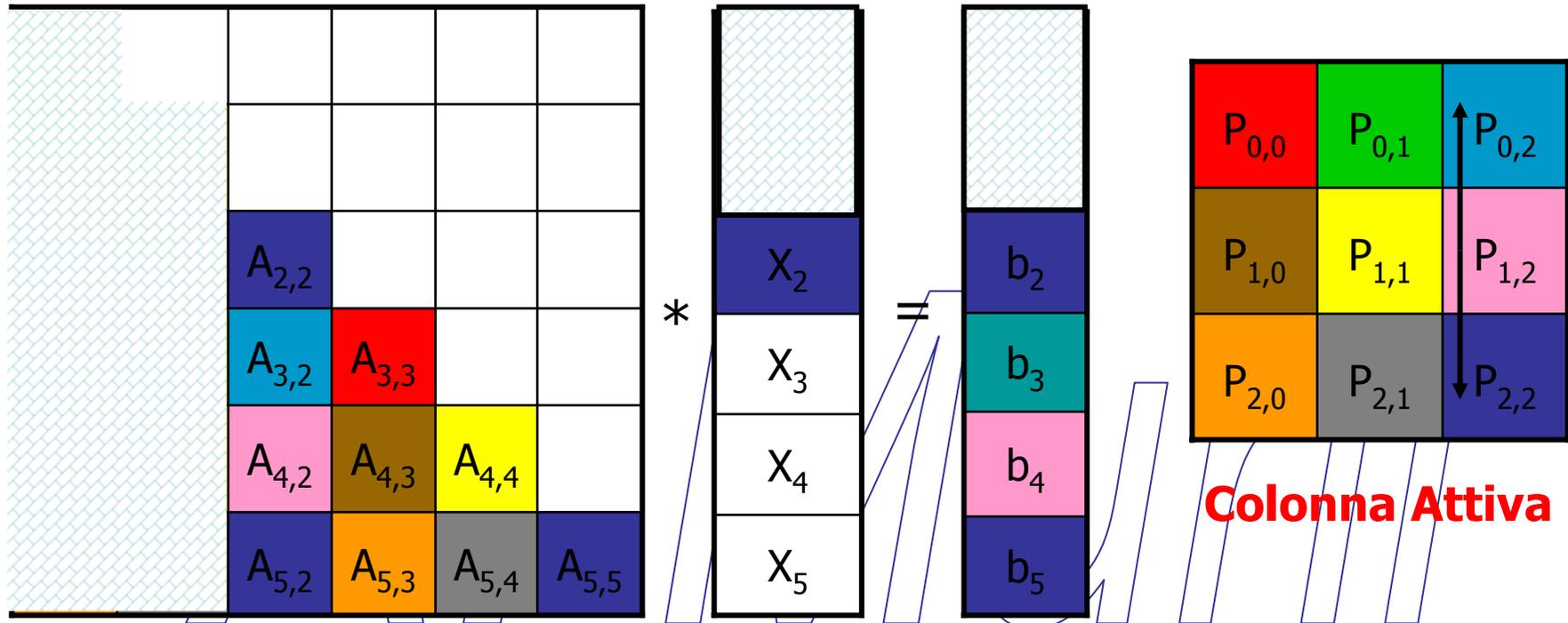
$$b_j = b_j - A_{j,1} * x_1 \text{ con } 1 < j < 6$$

Passo 2 $\rightarrow P_{i,1}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ inviano
 le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
 ai processori che seguono nella propria riga della griglia.

Passo 3 $\rightarrow P_{2,2}$: calcolo + spedizione

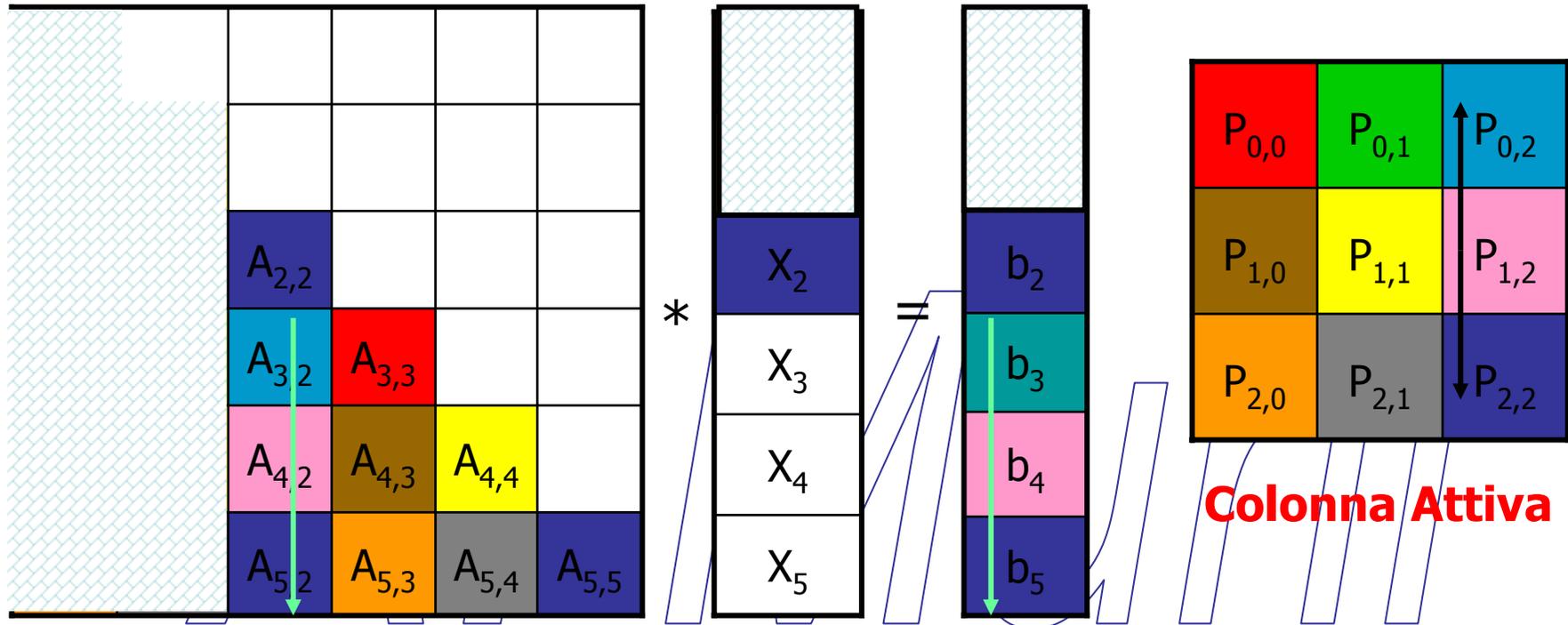


Il Processore $P_{2,2}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{2,2} * x_2 = b_2$$

Il Processore $P_{2,2}$ invia il blocco x_2 a tutti i processori $P_{i,2}$ appartenenti alla propria colonna della griglia (Colonna Attiva)

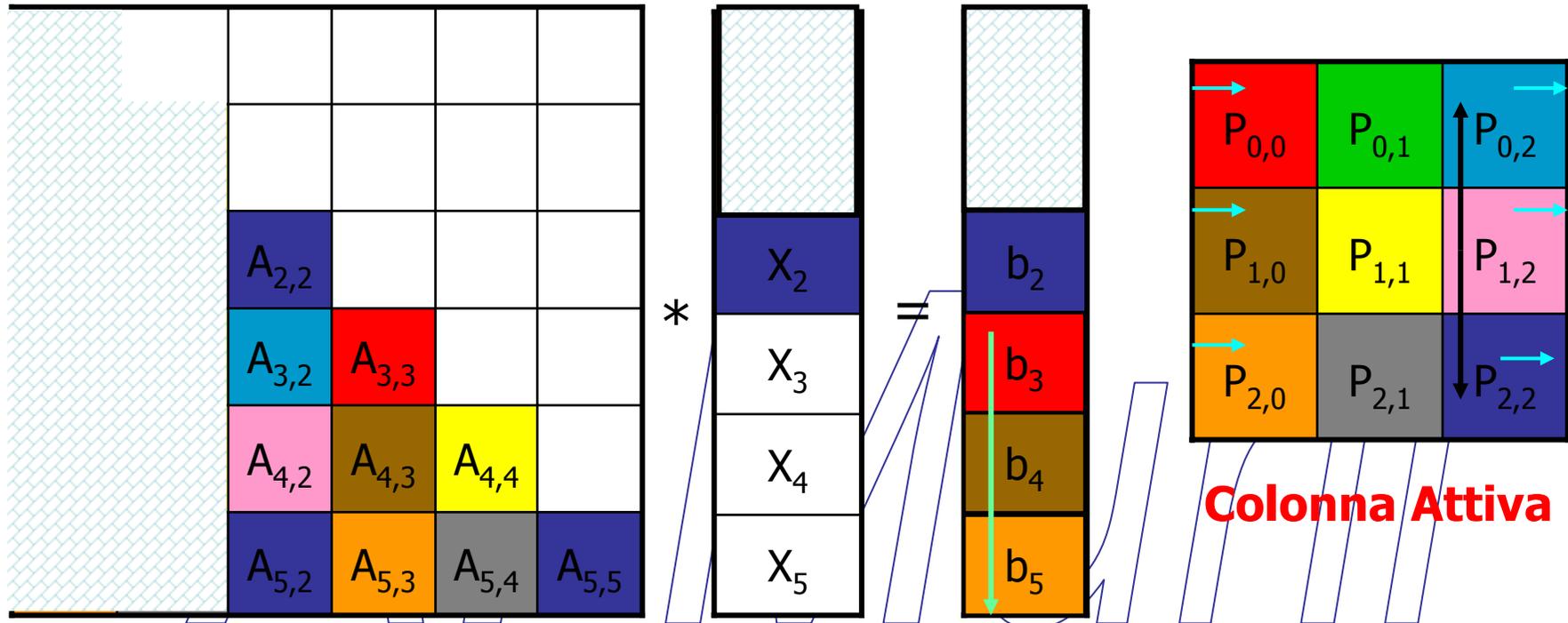
Passo 3 $\rightarrow P_{i,2}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,2}$ aggiornano
le componenti del vettore dei termini noti:

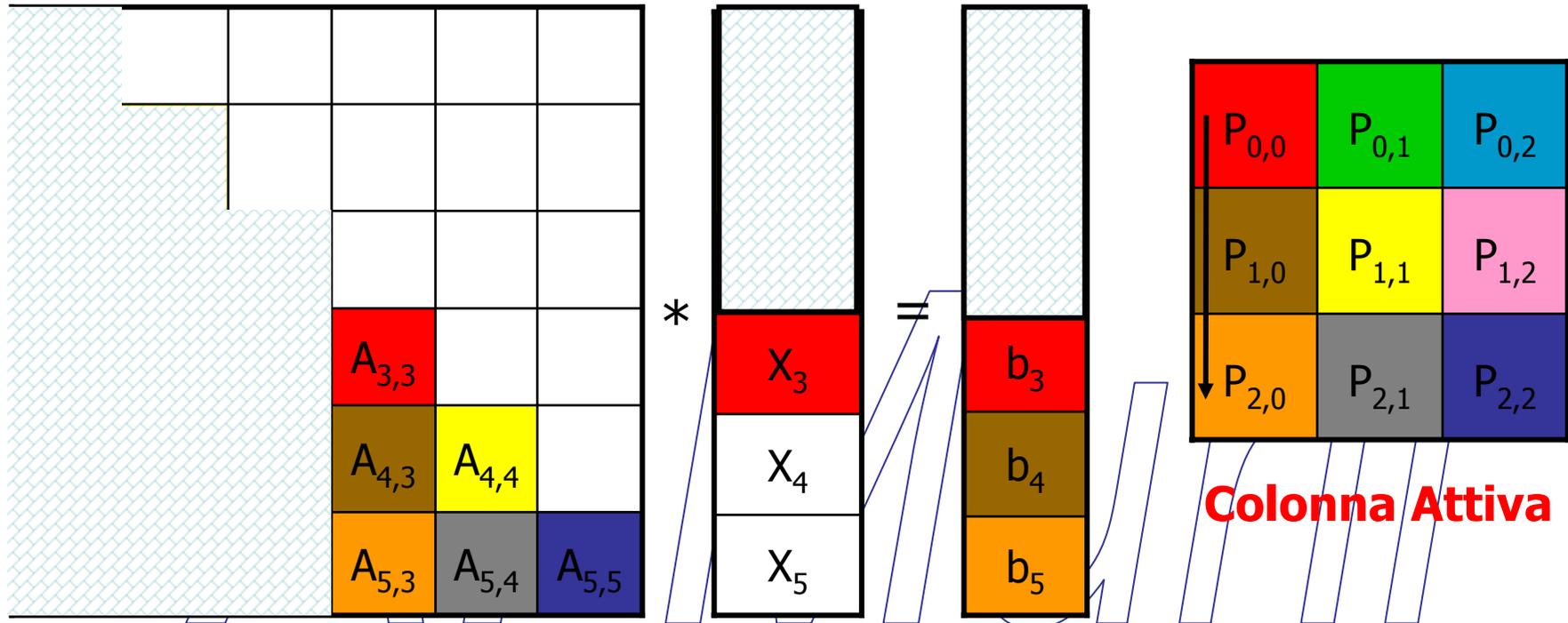
$$b_j = b_j - A_{j,2} * x_2 \text{ con } 2 < j < 6$$

Passo 3 $\rightarrow P_{i,2}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,2}$ inviano
 le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
 ai processori che seguono nella propria riga della griglia.

Passo 4 $\rightarrow P_{0,0}$: calcolo + spedizione

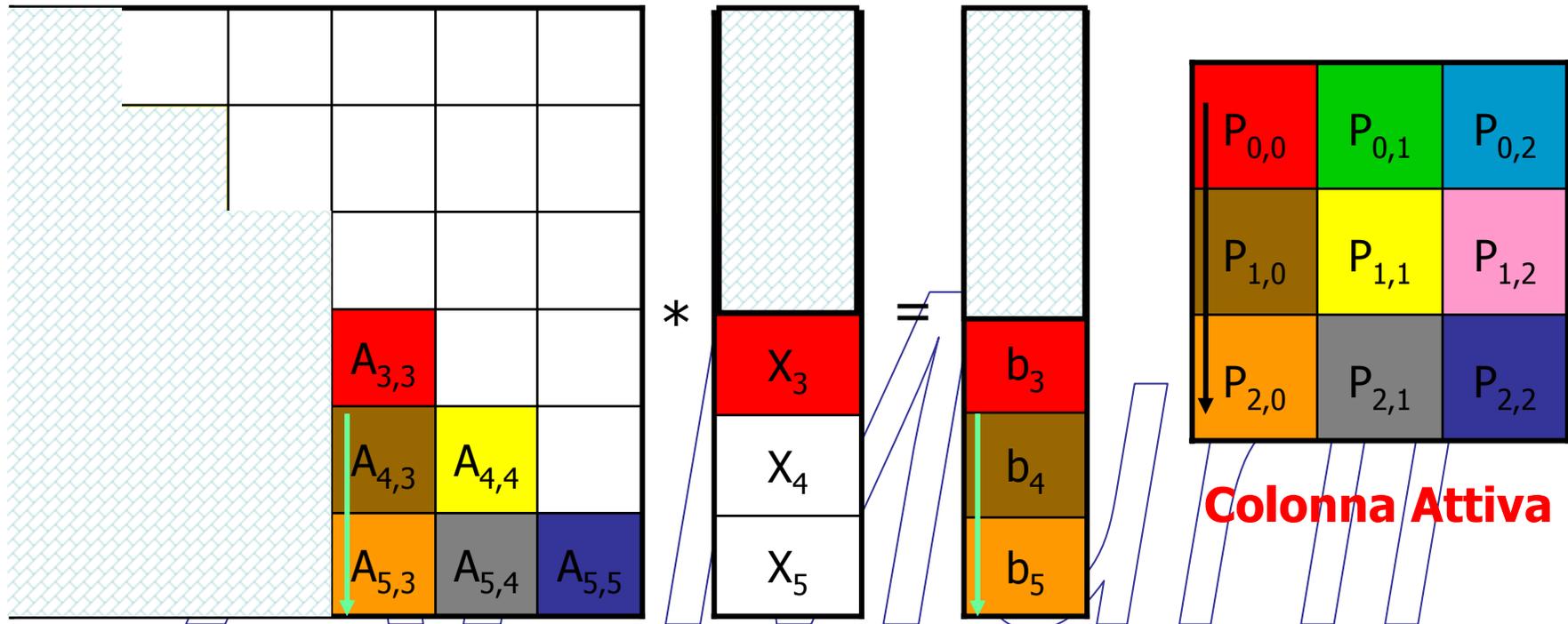


Il Processore $P_{0,0}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{3,3} * x_3 = b_3$$

Il Processore $P_{0,0}$ invia il blocco x_3 a tutti i processori $P_{i,0}$ appartenenti alla propria colonna della griglia con $i > 0$

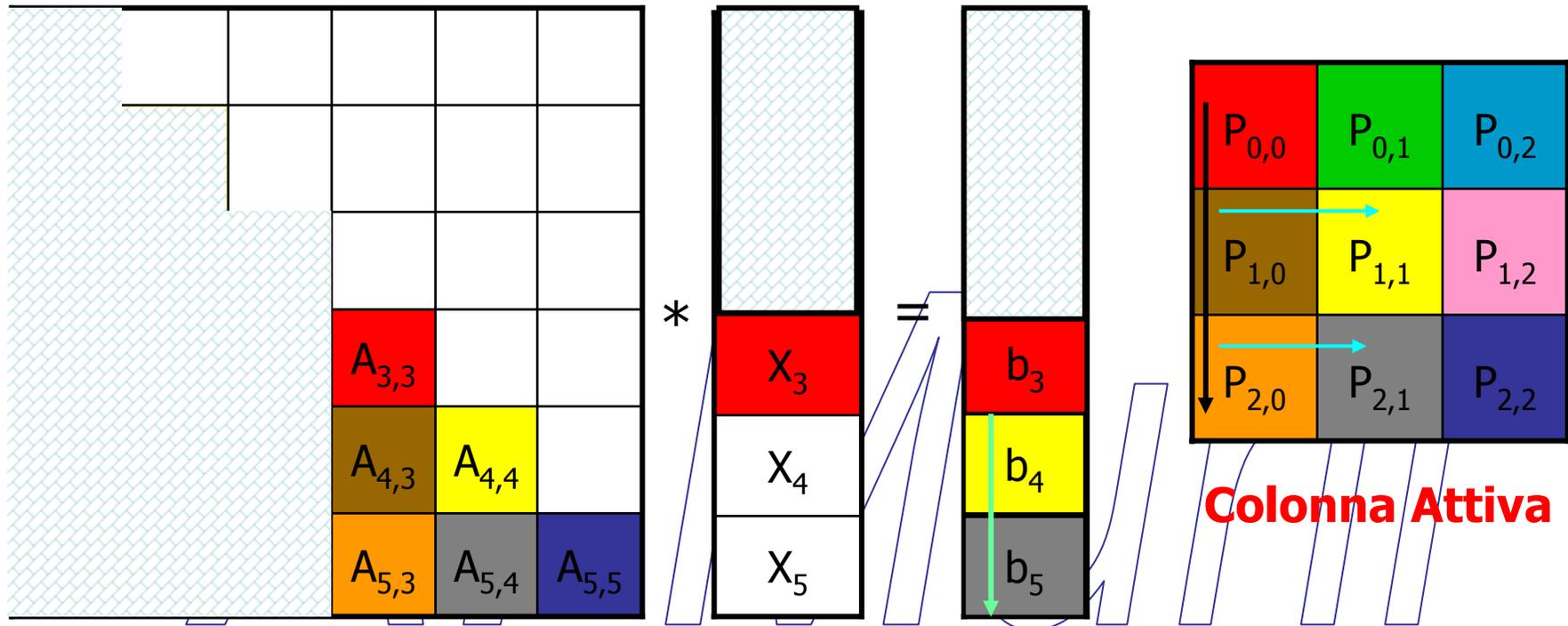
Passo 4 $\rightarrow P_{i,0}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$, $i > 0$, aggiornano
le componenti del vettore dei termini noti:

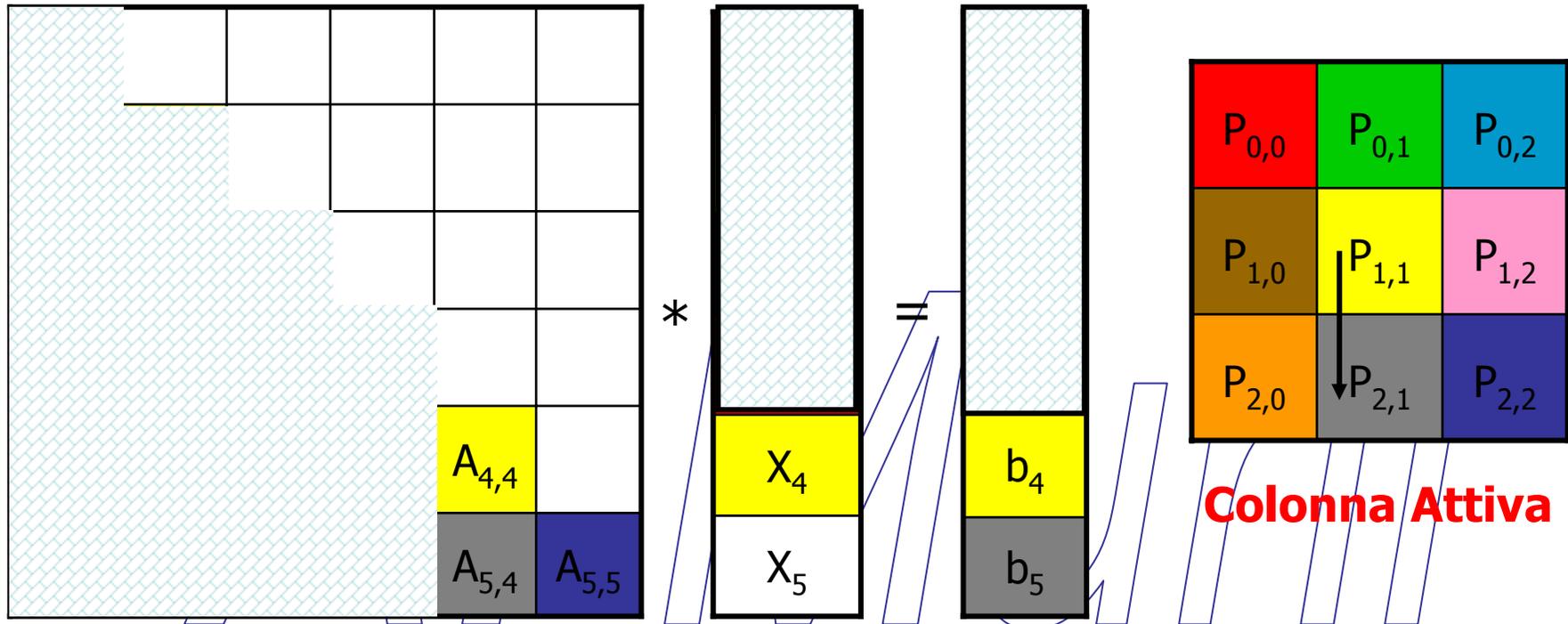
$$b_j = b_j - A_{j,3} * x_3 \text{ con } 3 < j < 6$$

Passo 4 $\rightarrow P_{i,0}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$ inviano
 le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
 ai processori che seguono nella propria riga della griglia $P_{i,j}$ con $j \leq i$.

Passo 5 $\rightarrow P_{1,1}$: calcolo

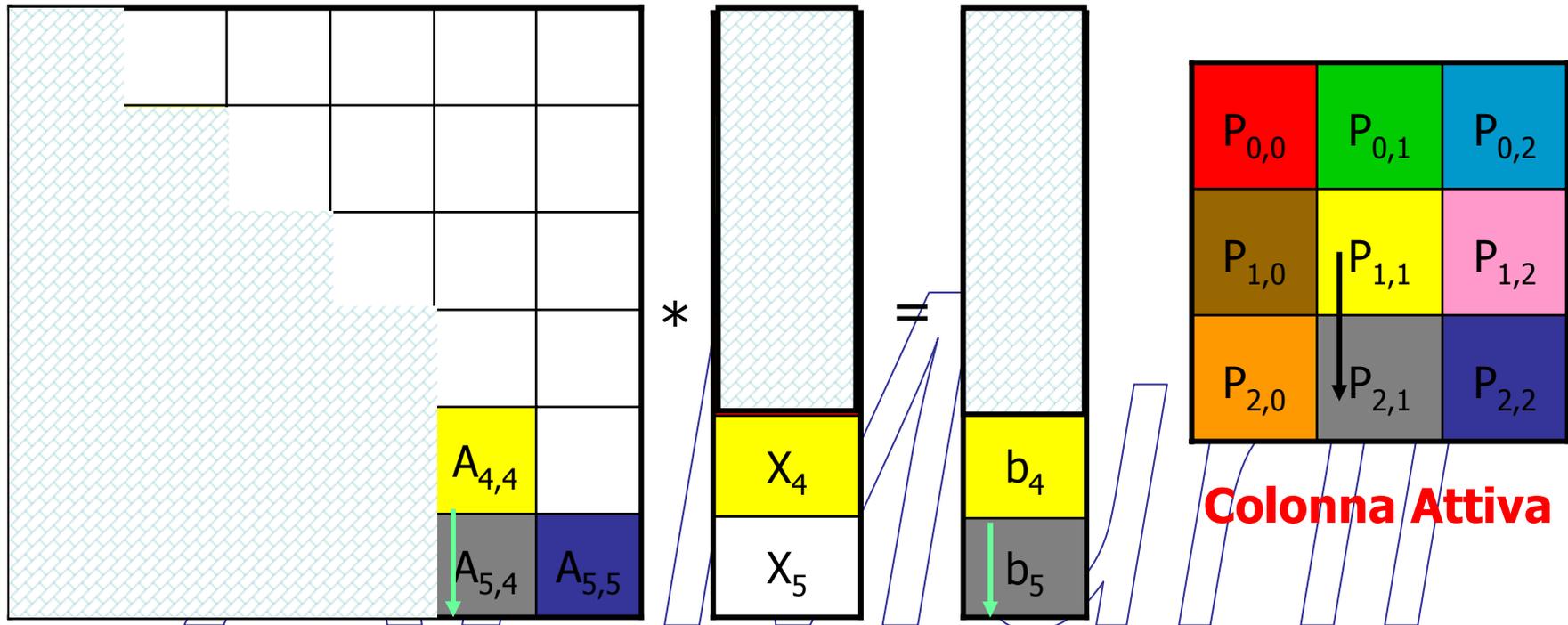


Il Processore $P_{1,1}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{4,4} * x_4 = b_4$$

Il Processore $P_{1,1}$ invia il blocco x_4 a tutti i processori $P_{i,1}$ appartenenti alla propria colonna della griglia con $i > 1$

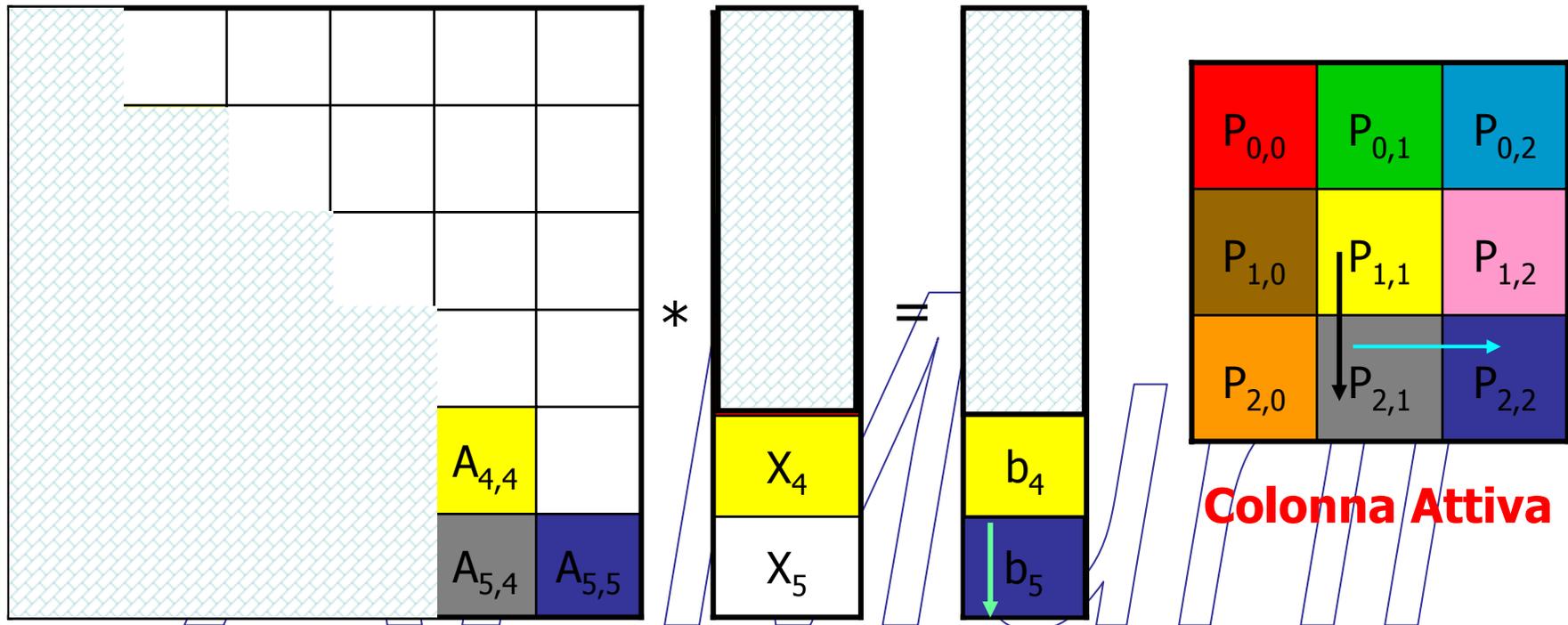
Passo 5 $\rightarrow P_{i,1}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ con $i > 1$ aggiornano
le componenti del vettore dei termini noti:

$$b_j = b_j - A_{j,4} * x_4 \text{ con } 4 < j < 6$$

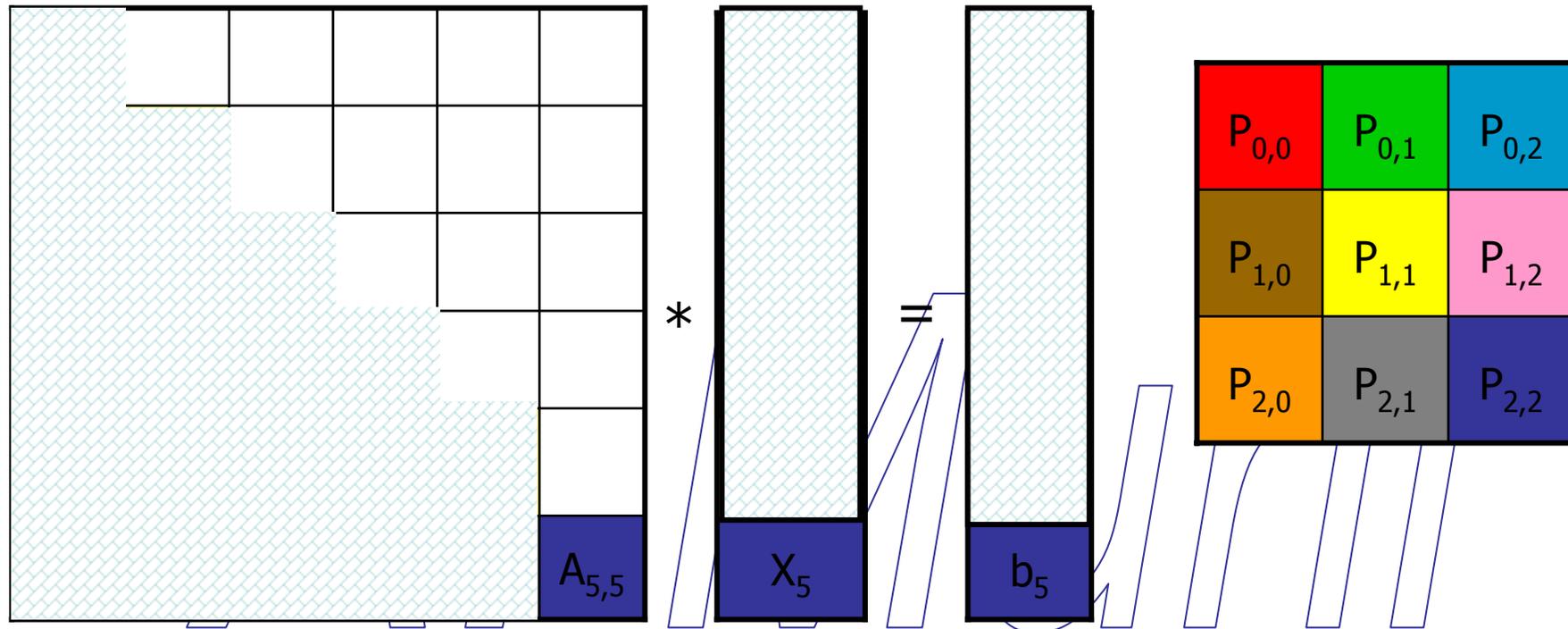
Passo 5 $\rightarrow P_{i,1}$: comunicazione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ con $i > 1$

inviano le componenti aggiornate del vettore dei termini noti ai processori che seguono nella propria riga della griglia $P_{i,j}$ con $j \leq i$.

Passo 6 $\rightarrow P_{2,2}$: calcolo

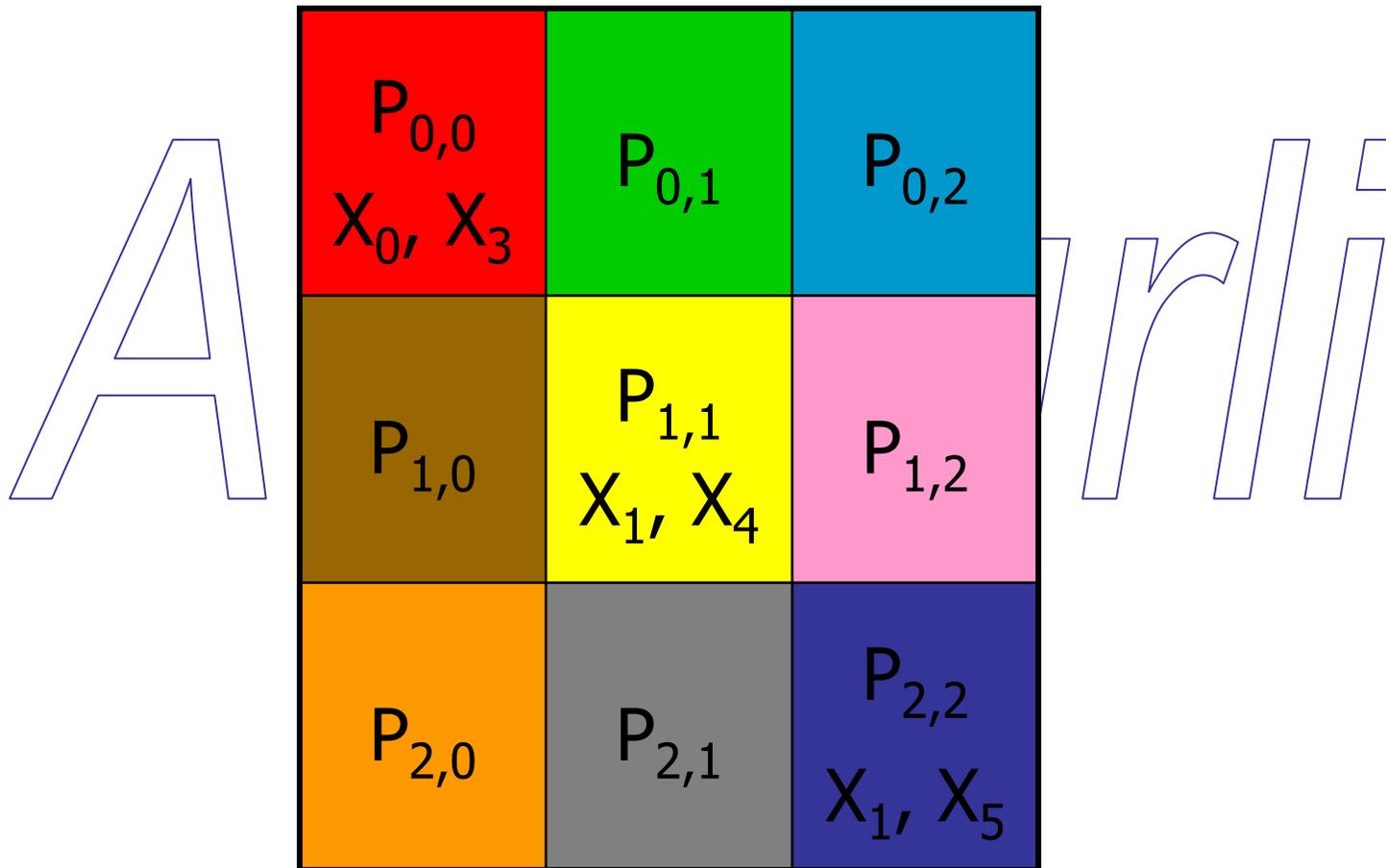


Il Processore $P_{2,2}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{5,5} * x_5 = b_5$$

IV Strategia: distribuzione ciclica lungo le righe e le colonne (2D)

La soluzione è così distribuita



A. Murli