Proprietà dell'operatore DFT

A. Murli

Calcolo della DFT di 2 vettori reali

$$\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in R^N$$

$$\underline{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1}) \in R^N$$

$$DFT[\underline{x}] = \underline{X} \in C^N$$

$$DFT[\underline{y}] = \underline{Y} \in C^N$$

2 DFT (N) complesse ...
...anche se x e y sono vettori reali

MA .....

Applicando le proprietà dell'operatore DFT
si riesce a ridurre il numero di operazioni
a quelle relative al calcolo di 1 DFT complessa

A. Murli

Proprietà di linearità

$$DFT(c\underline{f}+d\underline{g})=c\cdot DFT(\underline{f})+d\cdot DFT(\underline{g})$$

$$\left(\mathcal{F}\left[c\underline{f}+d\underline{g}\right]\right)_k=\sum_{j=0}^{N-1}\left(cf_j+dg_j\right)w_N^{-jk}=$$

$$=c\sum_{j=0}^{N-1}f_j w_N^{-jk}+d\sum_{j=0}^{N-1}g_j w_N^{-jk}=c\left(\mathbf{F}\left[\underline{f}\right]\right)_k+d\left(\mathbf{F}\left[\underline{g}\right]\right)_k$$

A. Murli

$\mathcal{F}$ è un operatore lineare

Proprietà di simmetria

Sia $\underline{F} = DFT\left[\underline{f}\right]$

$$\overline{\overline{f}} = (f_N, f_{N-1}, \ldots, f_{N/2}, \ldots, f_1)$$

$$\frac{1}{N} DFT\left[DFT\left[\underline{f}\right]\right] = \overline{\overline{f}}$$

$$\frac{1}{N}\left(\mathcal{F}\left[\underline{F}\right]\right)_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F_j w_N^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} F_j w_N^{(N-k)j} = f_{N-K}$$

k=0,…,N/2

poiché

$$w_N^{(N-k)j} = e^{\frac{2\pi i N j}{N}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{N}(-kj)} = w_N^{-kj}$$

$$e^{2\pi i j} = 1$$

A. Murli

ESEMPIO

$\underline{f}=(8+i,\ 5-3i,\ 2,\ 4-i,\ 6+2i)$

"completiamo" il vettore $(f_j)_{J=0,N-1}$
aggiungendo l'(n+1) - simo elemento $f_n=f_0$

$\underline{f}=(8+i,\ 5-3i,\ 2,\ 4-i,\ 6+2i,\ 8+i)$ con n=5

$$\underline{F} = DFT\left[\underline{f}\right] = (25-i, 2.3776+3.6266\,i, -2.9351+0.1857\,i,$$
$$4.8449+2.8143\,i, 10.7126-0.6266\,i, 25-i)$$

$$\frac{1}{5}\,DFT\left[\underline{F}\right] = (8+i, 6+2i, 4-i, 2, 5-3i, 8+i)$$

Proprietà di parità

$\underline{f}$ *reale* $\Rightarrow$ DFT$[\underline{f}]$ *hermitiano simmetrico*

Dim:

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{-2\pi i}{N} jk} e^{\frac{2\pi i}{N} Nj} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi i}{N}(N-k)j} = \overline{F}_{N-k}$$

k=0,…,N/2

Coniugato di F_{N-k}

A. Murli

RICORDIAMO CHE:

se h è un vettore di lunghezza N,

h hermitiano simmetrico se $h_j = \overline{h}_{N-j}$

Ad esempio (1+3i, -4, 5-i, -8-2i, -8+2i, 5+i, -4, 1-3i)

h hermitiano antisimmetrico se $h_j = -\overline{h}_{N-j}$

Ad esempio (1+3i, -4, 5-i, -8-2i, 8-2i, -5-i, 4, -1+3i)

A. Murli

Dimostriamo

$\underline{f}$ *immag.* $\Rightarrow$ $\underline{F}$ *hermit. antismm.*

Dim:

$\underline{f}$ immaginario $\Rightarrow$ $f_i = i\,y_i, \quad y_i \in R$ $\Rightarrow$

$$F_k = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right) + i \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right) =$$

$$= i\sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right) - \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right)$$

A. Murli

D'altra parte …

$$F_{N-k} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{\frac{2\pi(N-k)}{N} j} = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right) - i\sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right)$$

$$= i\sum_{j=0}^{N-1} y_j \cos\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right) + \sum_{j=0}^{N-1} y_j \sin\left(\frac{2\pi(N-k)}{N} j\right)$$

A. Murli

$$F_k = -\overline{F}_{N-k}$$

k=0,…,N/2

Analogamente :

$\underline{f}$ hermitiano simmetrico $\Rightarrow$ $\underline{F}$ reale

e

$\underline{f}$ hermitiano antisimmetrico $\Rightarrow$ $\underline{F}$ immaginario

A. Murli

Calcolo delle DFT di due sequenze reali

Siano

$$DFT[\underline{x}] = \underline{X} \in C^N, \quad \underline{x} = (x_0, \ldots, x_{N-1}) \in R^N$$

$$DFT[\underline{y}] = \underline{Y} \in C^N, \quad \underline{y} = (y_0, \ldots, y_{N-1}) \in R^N$$

1. **PASSO 1: costruiamo la sequenza complessa**

$$\underline{z} = \underline{x} + i\underline{y} \quad \rightarrow \quad \underline{z} = (z_0, \ldots, z_{N-1}) \in C^N$$

esempio

x=(5, 2, 1, -1, 3) y=(-2, 4, 1, 7, 3)

→ z=(5-2i, 2+4i, 1+i, -1+7i, 3+3i)

2. **PASSO 2**: Calcoliamo la DFT di z:

$$DFT[\underline{z}] = \underline{Z}, \qquad \underline{z} = (z_0, \ldots, z_{N-1}) \in C^N$$

$\mathcal{F}$ è un operatore lineare:

$$\mathcal{F}[\underline{z}] = \underline{Z} = \mathcal{F}[\underline{x}] + i\mathcal{F}[\underline{y}] = \underline{X} + i\underline{Y}$$

Poiché:

$\underline{x}$ e $\underline{y}$ sequenze reali

$\underline{X}$ e $\underline{Y}$ hermitiane e simmetriche

A. Murli

Cioè:

$$X_k = \overline{X}_{N-k} \quad e \quad \overline{X}_k = X_{N-k}$$

$$Y_k = \overline{Y}_{N-k} \quad e \quad \overline{Y}_k = Y_{N-k}$$

$$Z_k = X_k + iY_k$$

Posso sostituire k con N-k e passare ai coniugati

$$Z_k = \overline{Z}_{N-k}$$

$$\overline{Z}_{N-k} = X_{N-k} - iY_{N-k} = \overline{X}_k - i\overline{Y}_k$$

k=0,….,N/2

A. Murri

3. **PASSO 3:** Aggiungiamo e sottraiamo tra di loro le due relazioni

$$Z_k = X_k + i\,Y_k$$

$$\overline{Z}_{N-k} = \overline{X}_k - i\,\overline{Y}_k$$

k=0,…,N/2

$$X_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} + Z_k\right]$$

$$Y_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} - Z_k\right]$$

k=0,…,N/2

Calcolo di 2 DFT di 2 sequenze reali di **lunghezza N**

mediante **1 DFT** di 1 sequenza complessa di lunghezza **N**.

A. Murli

Esempio:

$\underline{x}=(5, 2, 1, -1, 3) \in R^5$ $\underline{y}=(-2, 4, 1, 7, 3) \in R^5$

calcoliamo le 2 DFT dei due vettori

Calcolo di 2 DFT di lunghezza 5

$\underline{X}=(10, 6.5451-0.2245i, 0.9549+2.4899i, 0.9549-2.4899i, 6.5451+0.2245i)$

$\underline{Y}=(13,-6.309+2.5757i, -5.191-6.2941i,-5.1910+6.2941i, -6.309-2.5757i)$

Applicando le proprietà della DFT..

$\underline{x}=(5, 2, 1, -1, 3) \in R^5$ $\underline{y}=(-2, 4, 1, 7, 3) \in R^5$

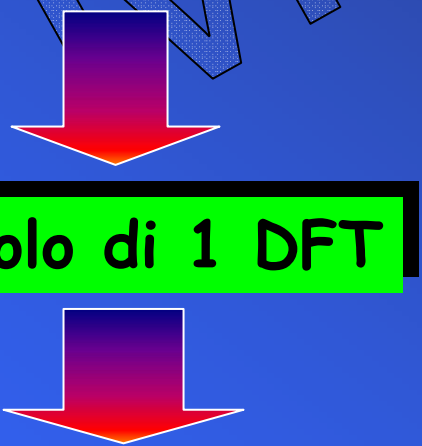
1. Costruiamo il vettore z=(x+iy)

→ $\underline{z} = (5-2i, 2+4i, 1+i, -1+7i, 3+3i) \in C^5$

2. Completiamo il vettore z con l'(n+1)-simo elemento $z_n=z_0$:

→ z=(5-2i, 2+4i, 1+i, -1+7i, 3+3i, 5-2i)

3. Calcoliamo la DFT del vettore complesso z:



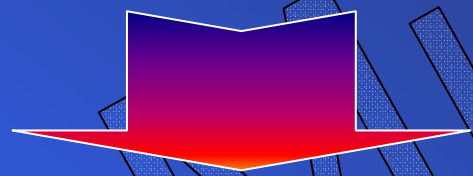
A. Miurri

$\underline{Z}$ = (10+13i, 3.9694-6.5335i, 7.249-2.7011i, -5.3392-7.6809i, 9.1207-6.0845i)

X=DFT(x) ed Y= DFT(y) si possono calcolare a partire da Z

$$X_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} + Z_k\right]$$ k=0,…,N/2 $$Y_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Z}_{N-k} - Z_k\right]$$

$\underline{Z}$ = (10+13i, 3.9694-6.5335i, 7.249-2.7011i, -5.3392-7.6809i, 9.1207-6.0845i)



X_1=1/2*[9.1207+6.0845i + 3.9694-6.5335i] = 6.5451-0.2245i

Y_1=i/2*[9.1207+6.0845i -3.9694+6.5335i] = -6.309+2.5757i

X_2=1/2*[-5.3392+7.6809i+ 7.249-2.7011i] = 0.9549+2.4899i

Y_2=i/2*[-5.3392+7.6809i- 7.249+2.7011i] = -5.191-6.2941i

A. Murli

…

Calcolo DFT di 2 vettori reali x , y:
ALGORITMO:

A. Murli

1. Costruiamo il vettore $z=(x+iy)$
2. Completiamo il vettore z con l'(n+1)-simo elemento $z_n=z_0$
3. Calcoliamo la DFT del vettore complesso z
4. Ricavare la DFT(x) e la DFT(y) a partire dalla DFT(z)

Calcolo DFT di un vettore reale di lunghezza 2N

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{2N-1}) \in R^{2N}$$

2 DFT di 2 vettori reali di lunghezza N

Dalla proprietà 1

1 DFT di 1 vettore complesso di lunghezza N

A. Murli

ALGORITMO:

Sia

$$\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{2N-1}) \in R^{2N}$$

k=0,…,N-1

STEP 1: costruiamo due vettori $\underline{h}$ e $\underline{g} \in R^N$ con

$$h_k = x_{2k} \qquad g_k = x_{2k+1}$$

A. Murli

$$\underline{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}) \qquad \underline{g} = (g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})$$

$$\underline{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2N-2}, x_{2N-1})$$

STEP 2: effettuiamo la DFT di $\underline{h}$ e $\underline{g} \in R^N$

$$X_k = \sum_{j=0}^{2N-1} x_j e^{-2\pi ijk/2N} = \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} x_{2j} e^{-2\pi ijk/N} + e^{-i\pi k/N} \sum_{j=0}^{N-1} x_{2j+1} e^{-2\pi ijk/N} =$$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} h_j e^{-2\pi ijk/N}}_{H_k} + e^{-i\pi k/N} \underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} g_j e^{-2\pi ijk/N}}_{G_k} =$$

$$= H_k + e^{-i\pi k/N} G_k$$

Muri!

$$DFT_N[\underline{h}] = \underline{H} \qquad DFT_N[\underline{g}] = \underline{G}$$

$$X_k = H_k + e^{-i\pi k/N} G_k \qquad k = 0, \ldots, N-1$$

Calcolo DFT di un vettore reale di lunghezza 2: ALGORITMO:

- **STEP 1:**

costruiamo i vettori h, g ed y tali che

$$h(j)=x(2j)$$
$$g(j)=x(2j+1)$$
$$y(j)=h(j)+ig(j)$$

- **STEP 2:**

calcolare la DFT del vettore complesso y

- **STEP 3:**

calcoliamo le DFT di h e g, a partire da y

$$H_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Y}(N-k) + Y(k)\right]$$

$$G_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Y}(N-k) - Y(k)\right]$$

- **STEP 4:**

calcoliamo le DFT di x, a partire da quella di h e g

$$X_k = H_k + e^{\frac{-ik\pi}{N}} G_k$$

$$X_{N+k} = \overline{X_k}$$

A. Murli

Esempio: calcolare la DFT del vettore

$\underline{x}=(2, -5, 8, -3, -2, 4) \in R^6$

- **Primo Passo**: costruiamo i vettori $\underline{h}$, $\underline{g}$ ed $\underline{y}$ tali che

```
h(j)=x(2j)
g(j)=x(2j+1)
y(j)=h(j)+ig(j)
```

$\underline{h} = (2, 8, -2) \in R^3$

$\underline{g} = (-5, -3, 4) \in R^3$

$\underline{y} = (2-5i, 8-3i, -2+4i) \in C^3$

A. Murli

- **Secondo Passo**: calcolare la DFT $\underline{Y}$ del vettore complesso $\underline{y}$:

$$DFT_N[\underline{y}] = \underline{Y}$$

$$\underline{Y} = (8 - 4i, -7.0622 - 14.1603i, 5.0622 + 3.1603i)$$

- **Terzo Passo**: calcoliamo le DFT di $\underline{h}$ e $\underline{g}$, a partire da $\underline{Y}$

$$H_k = \frac{1}{2}\left[\overline{Y}(N-k) + Y(k)\right]$$

$$G_k = \frac{i}{2}\left[\overline{Y}(N-k) - Y(k)\right]$$

$$\underline{H} = (8, -1 - 8.6603i, -1 + 8.6603i)$$

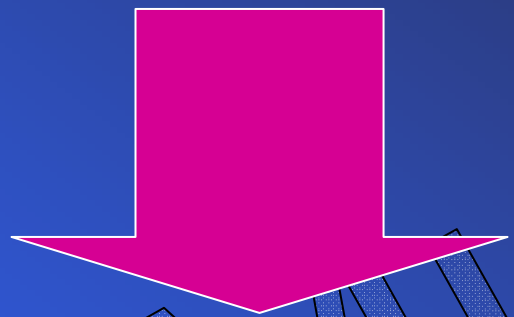
$$\underline{G} = (-4, -5.5 + 6.0622i, -5.5 - 6.0622i)$$

A. Aurilio

- Quarto Passo

$$X_k = H_k + e^{\frac{-ik\pi}{N}} G_k$$
$$X_{N+k} = \overline{X_k}$$

k=1,…,N



$$\underline{X} = DFT[\underline{x}] = (4, 1.5 - 0.866i, -3.5 + 16.4545i, 12, -3.5 - 16.4545i, 1.5 + 0.866i$$

A. Murli

Applicazione della DFT

alle

MATRICI CIRCOLANTI

A. Murli

Dato un vettore $\underline{V} = (V_0, V_1, \ldots, V_{n-1})$ la matrice

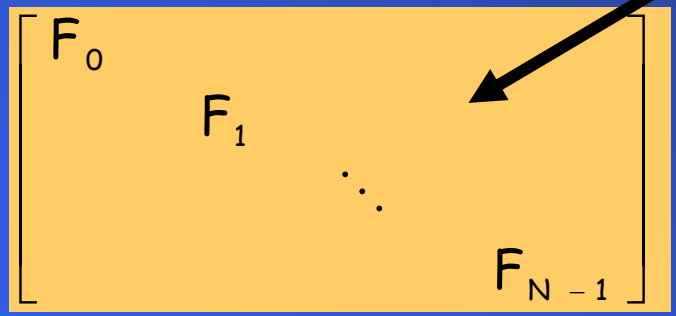
$$C(v) = \begin{bmatrix} V_0 & V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} \\ V_{n-1} & V_0 & V_1 & \cdots & V_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ V_1 & V_2 & \cdots & V_{n-1} & V_0 \end{bmatrix}$$

Il vettore riga k-mo è ottenuto dal vettore $\underline{v}$ traslato verso destra di k posizioni

A. Murli

MATRICE CIRCOLANTE

$$C(\underline{v}) = F^{-1}\Sigma F$$



$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{1} & \cdots & w_N^{(N-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & w_N^{(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Σ = diag (DFT($\underline{v}$))

F matrice di Fourier

$C(v)\cdot\underline{x}=\underline{y}$ ⇒ $(F^{-1}\Sigma F)\underline{x} = \underline{y} \Leftrightarrow F(F^{-1}\Sigma F)\underline{x} = F\underline{y}$

⇒ $\Sigma F\underline{x} = F\underline{y} \Leftrightarrow FFT(\underline{v}) \cdot FFT(\underline{x}) = FFT(\underline{y})$

CALCOLO del prodotto matrice-vettore,

$C(\underline{v})\,\underline{x} = \underline{y}$

1. $FFT(\underline{x}) = \tilde{\underline{x}}$
2. $FFT(\underline{v}) = \tilde{\underline{v}}$
3. $\tilde{\underline{v}} . * \tilde{\underline{x}} = \underline{z}$ → Prodotto puntuale
4. $IFFT(\underline{z}) = \underline{y}$

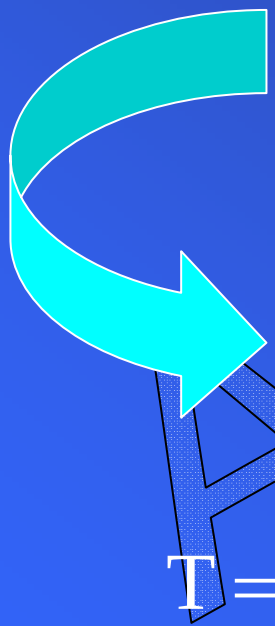
3 DFT e 1 prodotto puntuale tra vettori

complessità $O(n \log n)$

A. Murli

Matrici di Toeplitz, $T \in R^{nxn}$,

$$T = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & \cdots & r_{n-2} & r_{n-1} \\ r_{-1} & r_0 & \cdots & r_{n-3} & r_{n-2} \\ r_{-2} & r_{-1} & \cdots & r_{n-4} & r_{n-3} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ r_{-(n-1)} & r_{-(n-2)} & \cdots & r_{-1} & r_0 \end{pmatrix}$$



per n=4

$$T = \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & r_3 \\ r_{-1} & r_0 & r_1 & r_2 \\ r_{-2} & r_{-1} & r_0 & r_1 \\ r_{-3} & r_{-2} & r_{-1} & r_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Murli

Le matrici di Toeplitz possono essere “immerse” in Matrici Circolanti.

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow C(v) = \left(\begin{array}{ccccccc} 3 & 1 & 7 & 6 & 9 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 & 9 \\ 9 & 0 & 4 & 3 & 1 & 7 & 6 \\ \hline 6 & 9 & 0 & 4 & 3 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 9 & 0 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 6 & 9 & 0 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

di ordine 7x7 con $\underline{v}$= (3, 1, 7, 6, 9, 0, 4)

A. Murli

Il vettore $\underline{v}$ = (3, 1, 7, 6, 9, 0, 4) che genera la matrice circolante $C(\underline{v})$ è :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Prima riga della matrice di Toeplitz.

Prima colonna della matrice di Toeplitz, tranne il primo elemento, presa in ordine inverso.

A. Murli

In generale

$$T \in R^{n \times n} \Rightarrow C(\underline{v}) \in R^{(2n-1)x(2n-1)}$$

$T\,\underline{x} = \underline{y}$

prodotto matrice-vettore,
con matrice di Toeplitz T di ordine n

$C(\underline{v})\,\underline{x}' = \underline{y}$

prodotto matrice-vettore,
con matrice circolante di ordine 2n-1

A. Murli

C(v) è la matrice circolante "costruita intorno" alla matrice T, e $\underline{x}'$ è il vettore $\underline{x}$ a cui sono stati aggiunti n-1 zeri.

Teorema di convoluzione

Siano $\underline{f}, \underline{g} \in C^N$. Si ha

$$DFT\ [\ \underline{f} * \underline{g}\ ] = \underline{F} \otimes \underline{G}$$

Convoluzione di due vettori:

$$\underline{f} * \underline{g} = \underline{t} \ ; \ t_j = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\, g_{j-k}$$

j=0,1,…,N-1

Prodotto componente per componente:

$$\underline{F} \otimes \underline{G} = \underline{t} \ ; \ t_j = F_j G_j$$

La DFT della convoluzione di due vettori è il prodotto puntuale delle DFT dei vettori

Prodotto di due polinomi:

Siano

$$a(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

$$b(x) = \sum_{k=0}^{N-1} b_k x^k = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

Il loro prodotto è un polinomio c di grado 2n-2 :

$$c(x) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \ldots + a_{n-1} b_{n-1} x^{2n-2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2N-2} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

A. Murli

$$c(x) = a(x) \cdot b(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right) x^k$$

$$c(x) = \sum_{k=0}^{2N-2} c_k x^k \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Convoluzione di due vettori

A. Murli

Se scrivo i due vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ come

$$\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in C^{2N-1}$$

$$\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{N-1}, 0, 0, \ldots, 0) \in C^{2N-1}$$

$$\underline{c} = \underline{a} * \underline{b} = \mathcal{F}^{-1}_{2N-1}\left[\mathcal{F}_{2N-1}[\underline{a}] \otimes \mathcal{F}_{2N-1}[\underline{b}]\right] \in C^{2N-1}$$

A. Murli

Esempio:

Moltiplichiamo i due polinomi

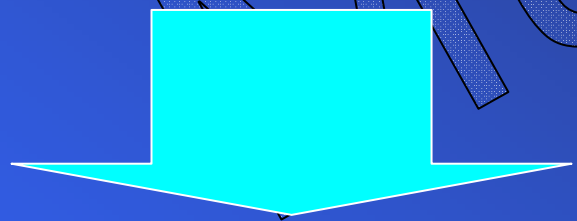
$a(x) = 1 + 5x + 17x^2$

$b(x) = 11 + 6x - 4x^2$

i coefficienti

$\underline{a} = (1, 5, 17) \in C^3$

$\underline{b} = (11, 6, -4) \in C^3$



$\underline{a} = (1, 5, 17) \rightarrow \underline{a} = (1, 5, 17, 0, 0)$

$\underline{b} = (11, 6, -4) \rightarrow \underline{b} = (11, 6, -4, 0, 0)$

Di dimensioni $2*3-1=5$

A. Murli

A = DFT [a]

$$= (23, -11.2082 - 14.7476i, 2.2082 + 13.229i, 2.2082 - 13.229i, -11.2082 + 14.7476i)$$

B = DFT [b]

$$= (13, 16.0902 - 3.3552i, 4.9098 - 7.3309i, 4.9098 + 7.3309i, 16.0902 + 3.3552i)$$

Il prodotto puntuale tra le due DFT è

A⊗B=(299, -229.82-199.69i, 107.82+48.76i, 107.82-48.76i, -229.82+199.69i)

La IDFT del vettore ottenuto è il prodotto di convoluzione dei vettori a e b:

a*b=(11, 61, 213, 82, -68)

A. Murli

La
Trasformata di Fourier (FT)
e la
Trasformata Discreta di Fourier (DFT)

A. Murli

Sia f(t) una funzione per cui esiste la

Trasformata di Fourier F(u):

$$F(u) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$

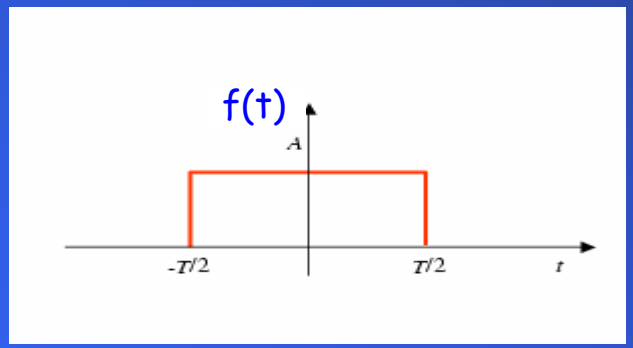
$u \in (-\infty, +\infty)$

A. Murli

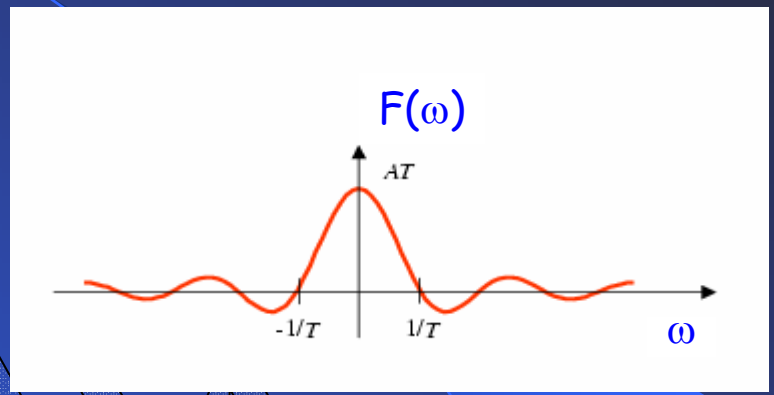
Esempi...

Funzione rettangolo:

$$F(\omega) = AT\frac{\sin \pi\omega T}{\pi\omega T}$$

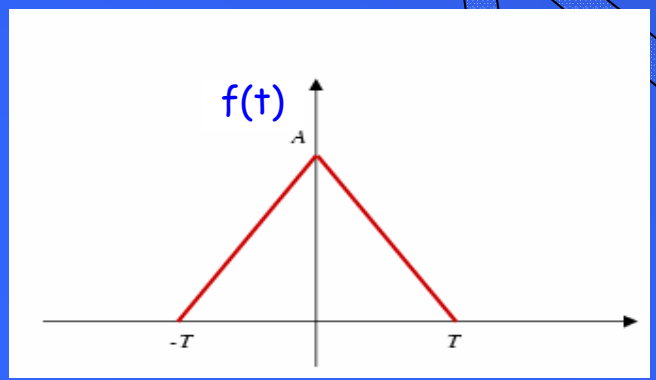


$\mathcal{F}$

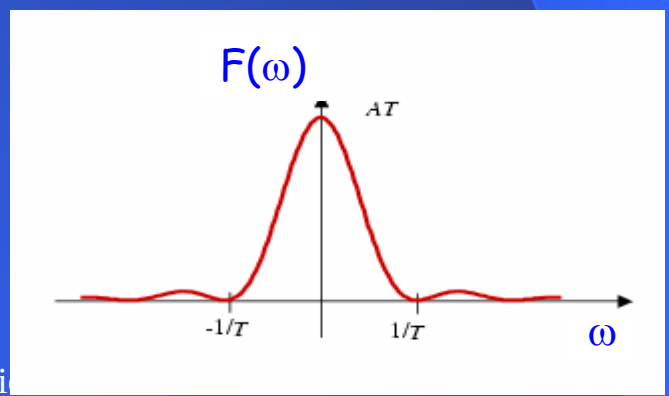


Funzione triangolo:

$$F(\omega) = AT\left(\frac{\sin \pi\omega T}{\pi\omega T}\right)^2$$



$\mathcal{F}$

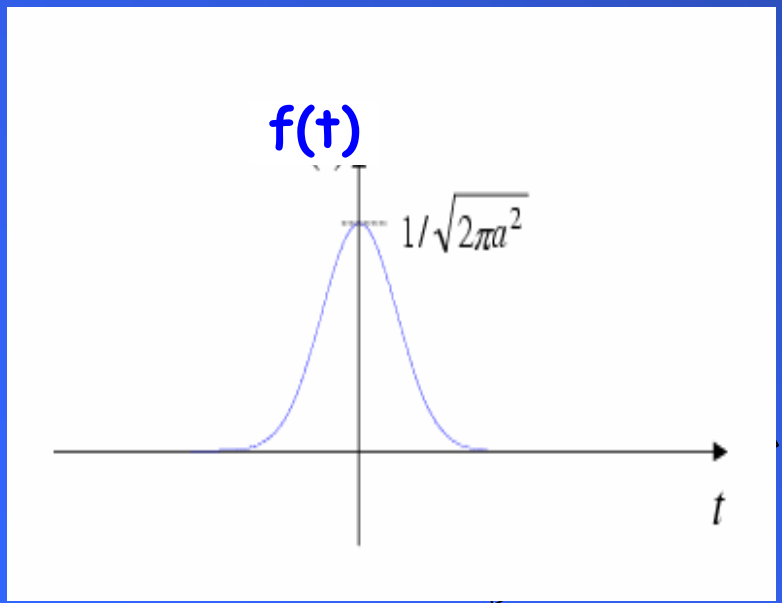


A. Murli

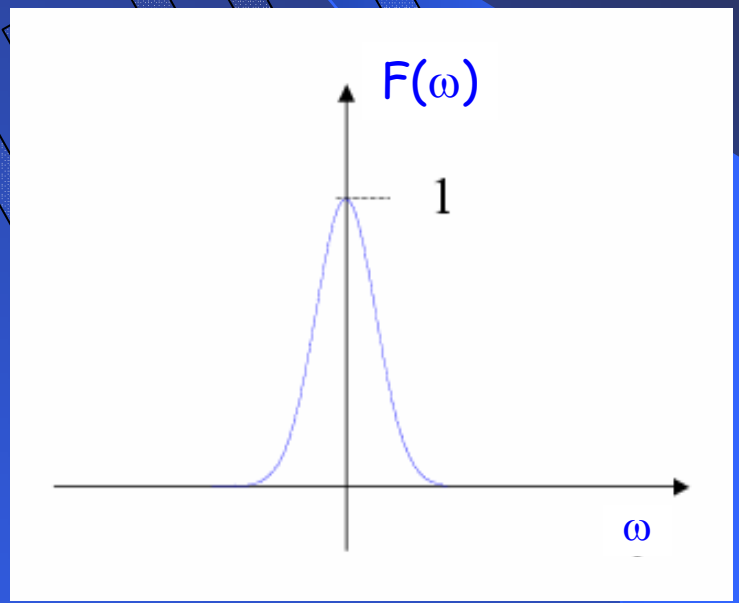
Funzione gaussiana:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(\omega) = e^{-2\omega^2\pi^2\sigma^2}$$



$\mathcal{F}$



Come calcolare una trasformata di FOURIER ?

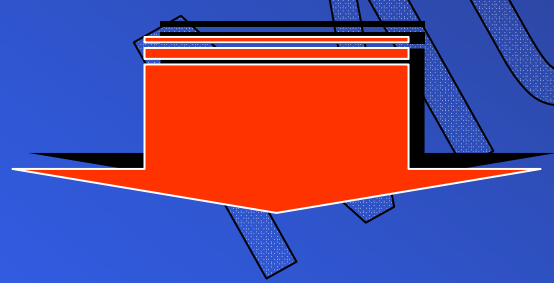
A. Murli

1. Tronchiamo l'integrale

da [-∞,+∞] all'intervallo [-τ,+τ], di ampiezza T=2τ, con

τ "sufficientemente" grande.

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$



$$F(u) \approx \int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$

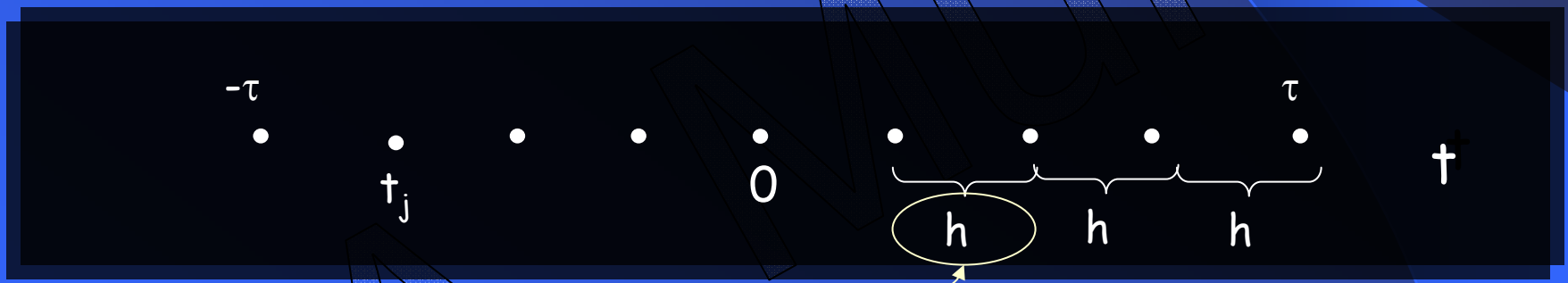
A. Murli

2. Discretizziamo l'integrale

mediante la formula di quadratura trapezoidale composita

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

su N+1 nodi (N=2m) $t_j = j\,h$ j=-m,…,0,…m

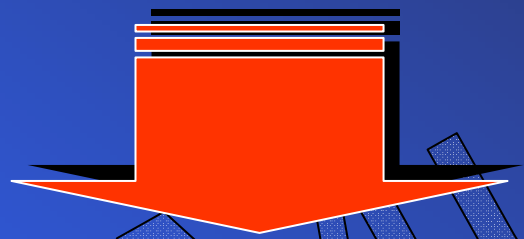


dove il passo h è

$$h = \frac{2\tau}{N} = \frac{T}{N} = \frac{\tau}{m}$$

Da:

$$F(u) = \int_{-\tau}^{+\tau} f(t)\, e^{-2\pi i u t}\, dt$$



$$\tilde{F}(u) = \frac{h}{2}\left[f(t_{-m})\, e^{-2\pi i u t_{-m}} + f(t_m)\, e^{-2\pi i u t_m} \right] +$$

$$+ h \sum_{j=-m+1}^{m-1} f(t_j)\, e^{-2\pi i u t_j}$$

A. Murli

3. Valutazione di $\hat{F}$ nei punti

$$u_k = k\Delta u = \frac{k}{2\tau} = k\frac{1}{T}$$

k=-m,...0,...,m

$$u_k v_j = \frac{k}{2\tau}\frac{2\pi j}{N} = \frac{kj}{N}$$

$$e^{-2\pi i u_k v_j} = e^{\frac{-2\pi i}{N}kj} = w_N^{-kj}$$

A. Murli

$$\tilde{F}(u_k) = \frac{h}{2}\left[f(t_{-m}) e^{-2\pi i u_k t_{-m}} + f(t_m) e^{-2\pi i u_k t_m} \right] +$$

$$+ h \sum_{j=-m+1}^{m-1} f(t_j) w_N^{-kj}$$

$-\tau$ $\quad w^{-km}$ $\quad \tau$ $\quad w^{km}$

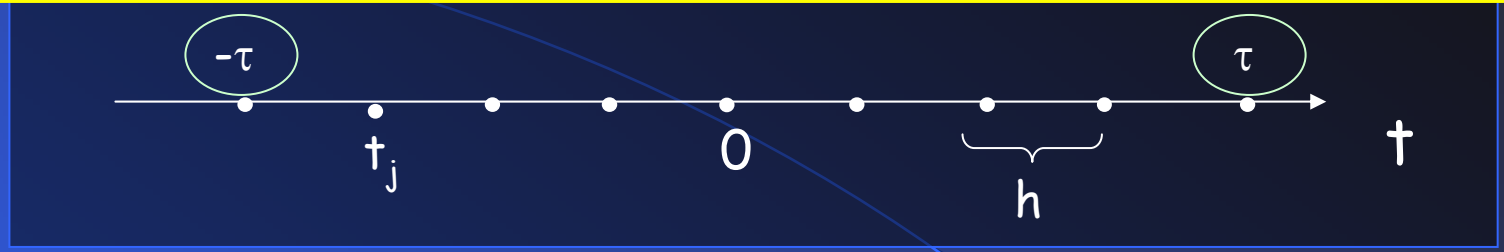
Poiché $w^{-km} = w^{km}$

(sono esponenziali complessi i cui esponenti differiscono per un multiplo intero di $2\pi i$)

A. Murli

$$\tilde{F}(u_k) = h\left\{ \frac{1}{2}\left[f(-\tau) + f(\tau) \right] w_N^{-kj} + \sum_{j=-m+1}^{m-1} f(t_j) w_N^{-kj} \right\}$$

4. Periodicizzazione di f nei punti estremi t = ±τ



poniamo $$f(t_{-m}) = f(t_m) = \frac{1}{2}[f(-\tau) + f(\tau)]$$

$$\tilde{F}(u_k) = \frac{T}{N} \sum_{j=-m}^{m} f(t_j)\, w_N^{-kj}$$

k=-m,...0,...,m

= DFT del vettore $\underline{f}$, $f_j = f(v_j)$

A. Murli

Qual è l'errore che si commette approssimando la trasformata di Fourier con la DFT

?

A. Murli

Cosa abbiamo fatto ?

1. sostituzione dell'integrale infinito con uno su un intervallo finito

Errore di troncamento

2. Discretizzazione con formula di quadratura trapezoidale

Errore di discretizzazione

A. Murli

Errore di troncamento

dovuto alla sostituzione dell'integrale tra $-\infty$ e $+\infty$ con l'integrale tra $-\tau$ e $+\tau$

Errore di discretizzazione

dovuto alla formula di quadratura che approssima l'integrale

A. Murli

Teorema

Se F è la FT di f(t): $F(u) = \mathcal{F}[f(v)]$

posto $\Omega = 2/T$

$$F_{\Omega}(u) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F(u + l\Omega)$$

$$f_T(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(t + lT)$$

si ha

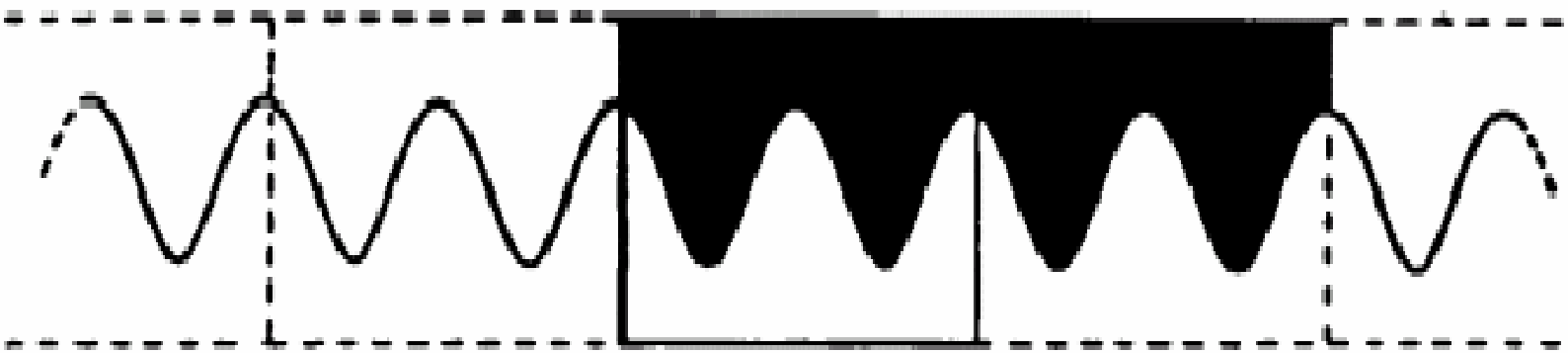
$$F_{\Omega}(k\Delta u) = DFT\ (f_T(jh))$$

ovvero

j,k= 0,1,…,N-1

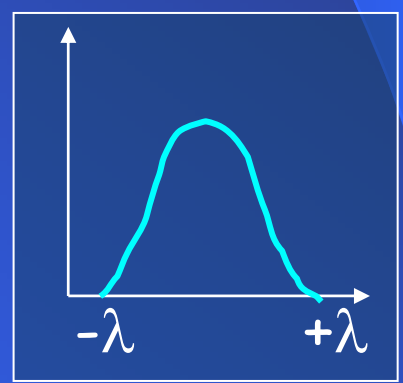
$$F_{\Omega}(u_k) = DFT\ (f_T(t_j))$$

$f_T(t)$ è la ripetizione periodica di periodo T della restrizione di f(t) all'intervallo $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$



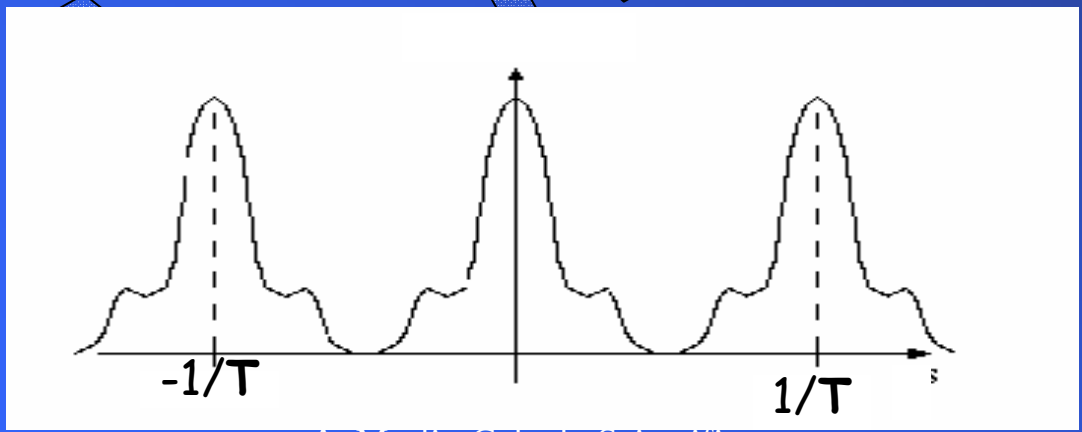
Se *f(t)* è a tempo limitato

$$f_T = f$$



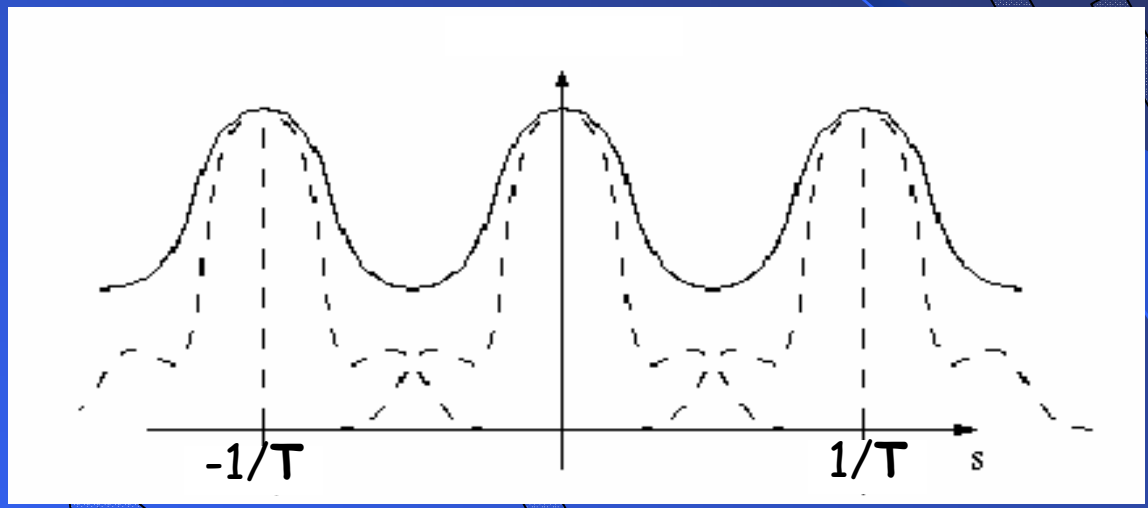
$F_\Omega(u)$ è la ripetizione periodica della restrizione di F all'intervallo $\left[-\frac{\Omega}{2},\frac{\Omega}{2}\right]=\left[-\frac{1}{T},\frac{1}{T}\right]$

Se la trasformata è nulla al di fuori dell'intervallo [-Ω/2,Ω/2], la periodicizzazione di F non crea sovrapposizioni e distorsioni



A. Murli

altrimenti,
le frequenze si sommano :"ALIASING"
(dal latino "alias" = "copia").



Se $T \to 0$ (è sufficientemente piccolo), $1/T$ sarà grande abbastanza, tale che $[-1/T, 1/T] \supseteq [-\Omega/2, \Omega/2]$

$T \leq 2/\Omega$

(frequenza di Nyquist).

A. Murli

In tale situazione, l'aliasing non può verificarsi, perché la trasformata viene replicata esattamente laddove termina la precedente funzione.

In particolare …

Se f è una funzione tale che

la sua trasformata di fourier è

A supporto nell'intervallo $[-\omega_c, \omega_c]$,

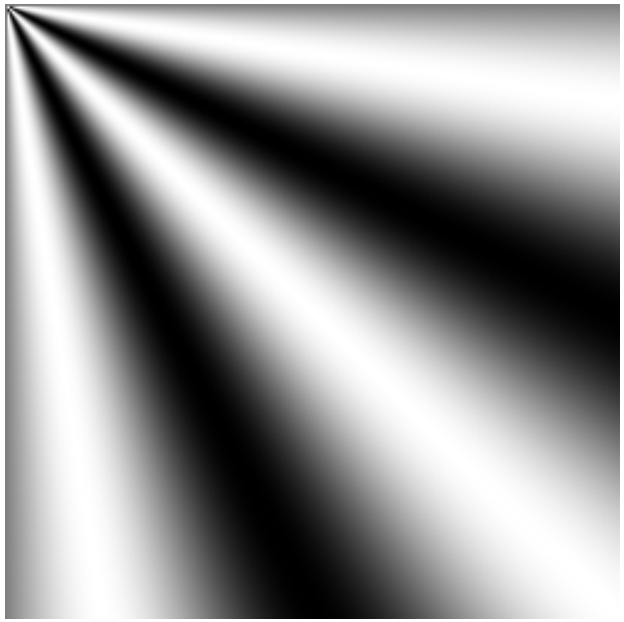
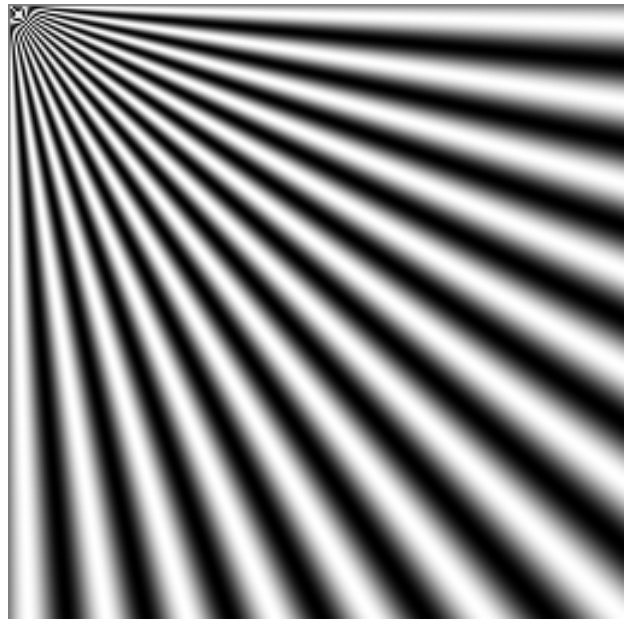
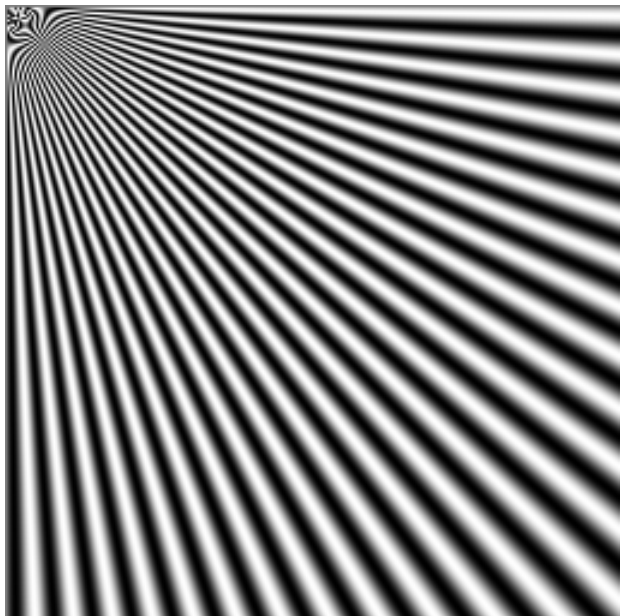
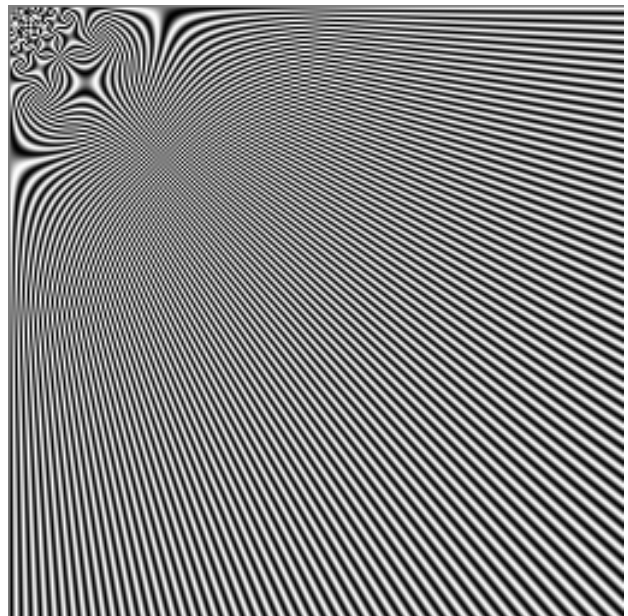
(f a banda limitata)

non si ha l'ALIASING!

basta scegliere

$$1/T > 2\omega_c$$

A. Murli

Esempi di aliasing:

Funzione iniziale