Risoluzione di sistemi lineari con *matrici a blocchi*

Luisa D'Amore

a.a. 2004-2005

Esempio 1

A matrice 6x6 *simmetrica*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 110 & 76 & 78 & 90 & 52 & -16 \\ 76 & 146 & 124 & 72 & 90 & 52 \\ 78 & 124 & 210 & 116 & 72 & 90 \\ \hline 90 & 72 & 116 & 210 & 124 & 78 \\ 52 & 90 & 72 & 124 & 146 & 76 \\ -16 & 52 & 90 & 78 & 76 & 110 \end{array}\right)$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A matrice a blocchi

Esempio 2

A matrice quadrata 6x6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

A matrice diagonale a blocchi

Esempio 2

A matrice a banda di ampiezza *7*

$$
p=3 \qquad q=3
$$

$$
A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 2x2 gli elementi di A

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}
$$

A matrice Tridiagonale a blocchi

Esempio 3

A matrice a banda di ampiezza 7

p=3

q=3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 8 & -1 \\ -1 & 8 & 6 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Raggruppiamo in "blocchi" di dimensione 3x3 gli elementi di A

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A matrice
Tridiagonale a blocchi

se raggruppiamo i coefficienti di *A*
in blocchi
e
riguardiamo ciascun blocco come
un coefficiente

Decomposizione di una matrice in blocchi

Perché
partizionare
una matrice **in blocchi**
?

Sviluppo di algoritmi *ad hoc*

Esempio 1 (cont)

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 110 & 76 & 78 & 90 & 52 & -16 \\ 76 & 146 & 124 & 72 & 90 & 52 \\ 78 & 124 & 210 & 116 & 72 & 90 \\ \hline 90 & 72 & 116 & 210 & 124 & 78 \\ 52 & 90 & 72 & 124 & 146 & 76 \\ -16 & 52 & 90 & 78 & 76 & 110 \end{array}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

A_{11} e A_{22} simmetriche ottenute l'una da una rotazione dell'altra

A_{12} e A_{22} Toeplitz ottenute l'una da una rotazione dell'altra

Esempio 2 (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

Partizionando in blocchi

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_1 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_2 & D_3 \end{pmatrix}$$

A **non** è diagonale
MA
alcuni suoi blocchi lo sono
$(D_1, D_2, D_3, E_2, F_2)$.

A **non** è simmetrica
MA
alcuni suoi blocchi lo sono
(F_1, E_1).

Esempio 3 (cont)

$$
\begin{array}{cc}
 & p=3 \\
q=3 & A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 8 & -1 \\ -1 & 8 & 6 & 3 & 6 & 8 \\ 0 & -1 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Partizionando in blocchi

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = A_{22}$ simmetrica

$A_{21} = A_{12}^{T}$ triangolare

Case study: la fattorizzazione LU di una matrice partizionata a blocchi

Ricordiamo che...

A matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_2 & d_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & d_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & d_n \end{pmatrix}$$

$w = p + q + 1 =$
$1 + 1 + 1 = 3$

La fattorizzazione LU conduce alle matrici bidiagonali

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & l_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_n & 1 \end{pmatrix}$$

$w = p + 1 =$
$1 + 1 = 2$

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & f_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}$$

$w = q + 1 =$
$1 + 1 = 2$

come si trasformano le matrici
L e U nel caso di
A tridiagonale a blocchi
?

in analogia al caso scalare

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

A è una matrice **tridiagonale a blocchi**

Applicando ad A la fattorizzazione LU,
si verifica che:

$$L = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix}$$

L matrice **bidiagonale a blocchi**

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

U matrice **bidiagonale a blocchi**

... in analogia al caso scalare

Fattorizzando $A=LU$

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

$$\qquad A \qquad\qquad\qquad L \qquad\qquad\qquad U$$

Gli elementi di U e di A appartenenti alla banda superiore coincidono.

Gli elementi di L da determinare sono: L_2 , L_3

Gli elementi di U da determinare sono le matrici diagonali: U_1 , U_2, U_3

Dall'uguaglianza A = LU

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}}_{U}$$

otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = U_1 \\ E_2 = L_2 U_1 \\ D_2 = L_2 F_1 + U_2 \\ E_3 = L_3 U_2 \\ D_3 = L_3 F_2 + U_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} U_1 := D_1 \\ L_2 := E_2\, U_1^{-1} \\ U_2 := D_2 - L_2 F_1 \\ L_3 := E_3\, U_2^{-1} \\ U_3 := D_3 - L_3 F_2 \end{array}$$

In particolare ...

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \boxed{L_2} & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & \boxed{U_2} & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{U}}
$$

$$\boxed{L_2 := E_2 U_1^{-1}}$$

$$\boxed{U_2 := D_2 - L_2 F_1}$$

U_1 diagonale

⬇

Banalmente invertibile

⬇

O(n) operazioni

⬇

Prodotto tra matrici

⬇

$O(n^2)$ operazioni

e...

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & \boxed{L_3} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & \boxed{U_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \qquad\qquad \mathbf{L} \qquad\qquad \mathbf{U}$$

$\boxed{L_3 := E_3 U_2^{-1}}$ $\qquad$ $\boxed{U_3 := D_3 - L_3 F_2}$

U_2 diagonale

Banalmente invertibile $\qquad$ Prodotto tra matrici

O(n) operazioni $\qquad$ O(n^2) operazioni

IN GENERALE:
Fattorizzazione LU di matrici Tridiagonali a blocchi

$$
\begin{array}{cc}
 & p=1 \\
q=1 & \begin{pmatrix} D_1 & F_1 & \cdots & & \mathbf{0} \\ E_2 & D_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & D_{n-1} & F_{n-1} \\ \mathbf{0} & & \cdots & E_n & D_n \end{pmatrix}
\end{array}
$$

matrice
tridiagonale **a blocchi**

$$\boxed{\begin{aligned} w &= p + q + 1 = \\ &\quad 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}}$$

La fattorizzazione LU produce

$$
q=1 \quad \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & & \\ L_2 & I & \cdots & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & I & 0 \\ & \mathbf{0} & \cdots & L_n & I \end{pmatrix}
$$

$$
\overset{p=1}{\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & \cdots & & \\ 0 & U_2 & \cdots & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & U_{n-1} & F_{n-1} \\ & \mathbf{0} & \cdots & 0 & U_n \end{pmatrix}}
$$

Matrice bidiagonale inferiore **a blocchi**

matrice bidiagonale superiore **a blocchi**

$$\boxed{w = q + 1 = 1 + 1 = 2}$$

$$\boxed{w = p + 1 = 1 + 1 = 2}$$

Eseguendo il prodotto **L U** e ricavando L_i e U_i si ottiene:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & \cdots & & 0 \\ E_2 & D_2 & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & D_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & & \cdots & E_n & D_n \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & & 0 \\ \boxed{L_2} & I & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & I & 0 \\ 0 & & \cdots & \boxed{L_n} & I \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{U_1} & F_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \boxed{U_2} & \cdots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \cdots & \boxed{U_{n-1}} & F_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & \boxed{U_n} \end{pmatrix}}_{U}$$

$$U_1 := D_1$$

$$L_2 := E_2 U_1^{-1}$$

$$U_2 := D_2 - L_2 F_1$$

$$\cdots$$

$$L_n := E_n U_{n-1}^{-1}$$

$$U_n := D_n - L_n F_{n-1}$$

Come si specializzano
gli algoritmi di Forward e
back substitution
per matrici
bidiagonali a blocchi

?

La fattorizzazione LU a blocchi

$$\begin{pmatrix} D_1 & F_1 & 0 \\ E_2 & D_2 & F_2 \\ 0 & E_3 & D_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{pmatrix}$$

x_i, y_i, z_i
sono vettori di lung. n

risoluzione di 2 sistemi
bidiagonali a blocchi

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix}$$

Risoluzione di Lz=y

$$\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ L_2 & I & 0 \\ 0 & L_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{y}_1 = \underline{z}_1;$

$\underline{y}_2 = L_2\underline{z}_1 + \underline{z}_2;$

$\underline{y}_3 = L_3\underline{z}_2 + \underline{z}_3;$

$\underline{z}_1 := \underline{y}_1;$

$\underline{z}_2 := \underline{y}_2 - L_2\underline{z}_1;$

$\underline{z}_3 := \underline{y}_3 - L_3\underline{z}_2;$

$O(n^2)$ operazioni

Risoluzione di Ux=z

$$\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{z}_1 \\ \underline{z}_2 \\ \underline{z}_3 \end{pmatrix}$$

$\underline{z}_3 = U_3\,\underline{x}_3\,;$

$\underline{z}_2 = F_2\,\underline{x}_3 + U_2\,\underline{x}_2;$

$\underline{z}_1 = F_1\,\underline{x}_2 + U_1\,\underline{x}_1;$

$\underline{x}_3 := (U_3)^{-1}\,\underline{z}_3;$

$\underline{x}_2 := (U_2)^{-1}\,(\underline{z}_2 - \mathrm{F}_2\,\underline{x}_3);$

$\underline{x}_1 := (U_1)^{-1}\,(\underline{z}_1 - \mathrm{F}_1\,\underline{x}_2);$

In generale

Risoluzione di un sistema con matrice tridiagonale a blocchi…

Risoluzione del sistema ***L y =b***:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & L_n & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &y_1 = b_1; \\ &y_2 = b_2 - L_2 y_1; \\ &\ldots \\ &y_n = b_n - L_n y_{n-1}; \end{aligned}}$$

Risoluzione del sistema ***U x = y***:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} U_1 & F_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & F_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & U_{n-1} & F_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & U_n \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{y}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x_n = (U_n)^{-1} y_n; \\ &x_{n-1} = (U_{n-1})^{-1}(y_{n-1} - F_{n-1} x_n); \\ &\ldots \\ &x_1 = (U_1)^{-1}(y_1 - F_1 x_2); \end{aligned}}$$

Algoritmi di forward e back substitution per matrici bidiagonali a blocchi

for i = 1 to n **do**

$$y_i = b_i - L_i y_{i-1}$$

endfor

$$(L_1 y_0 = 0)$$

forward substitution

for i = n to 1 **do**

$$U_i x_i = y_i - F_i y_{i+1}$$

endfor

$$(F_n x_{n+1} = 0)$$

back substitution

Fattorizzazione LU di una matrice a blocchi

Esempio: A: matrice quadrata partizionata in 9=3x3 blocchi

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Posto

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}}_{L} * \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & U_{22} & U_{23} \\ & & U_{33} \end{bmatrix}}_{U}$$

effettuando il prodotto :

$$A_{11} = L_{11}U_{11} \qquad A_{12} = L_{11}U_{12} \qquad A_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$A_{21} = L_{21}U_{11} \qquad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \qquad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$$

$$A_{31} = L_{31}U_{11} \qquad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} \qquad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$$

Da queste uguaglianze si ricavano le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e e di U

$$\boxed{A_{11} = L_{11}U_{11}} \qquad A_{12} = L_{11}U_{12} \qquad A_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$A_{21} = L_{21}U_{11} \qquad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \qquad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$$

$$A_{31} = L_{31}U_{11} \qquad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} \qquad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$$

es. $L_{11}\, U_{11} = A_{11}$

cioè L_{11} e U_{11} sono ottenuti calcolando la fattorizzazione LU del blocco A_{11}

Da queste uguaglianze si ricavano le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11} \qquad A_{12} = L_{11}U_{12} \qquad A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11} \qquad \boxed{A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}} \qquad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

$A_{31} = L_{31}U_{11} \qquad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} \qquad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

es. $L_{22}\, U_{22} = A_{22} - L_{21}\, U_{12}$

- cioè L_{22} e U_{22} si ottengono calcolando la fattorizzazione LU di $A_{22} - L_{21}\, U_{12}$

Da queste uguaglianze si ricavano le espressioni per il calcolo dei blocchi di L e e di U

$A_{11} = L_{11}U_{11}$ $\quad A_{12} = L_{11}U_{12}$ $\quad A_{13} = L_{11}U_{13}$

$A_{21} = L_{21}U_{11}$ $\quad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$ $\quad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$

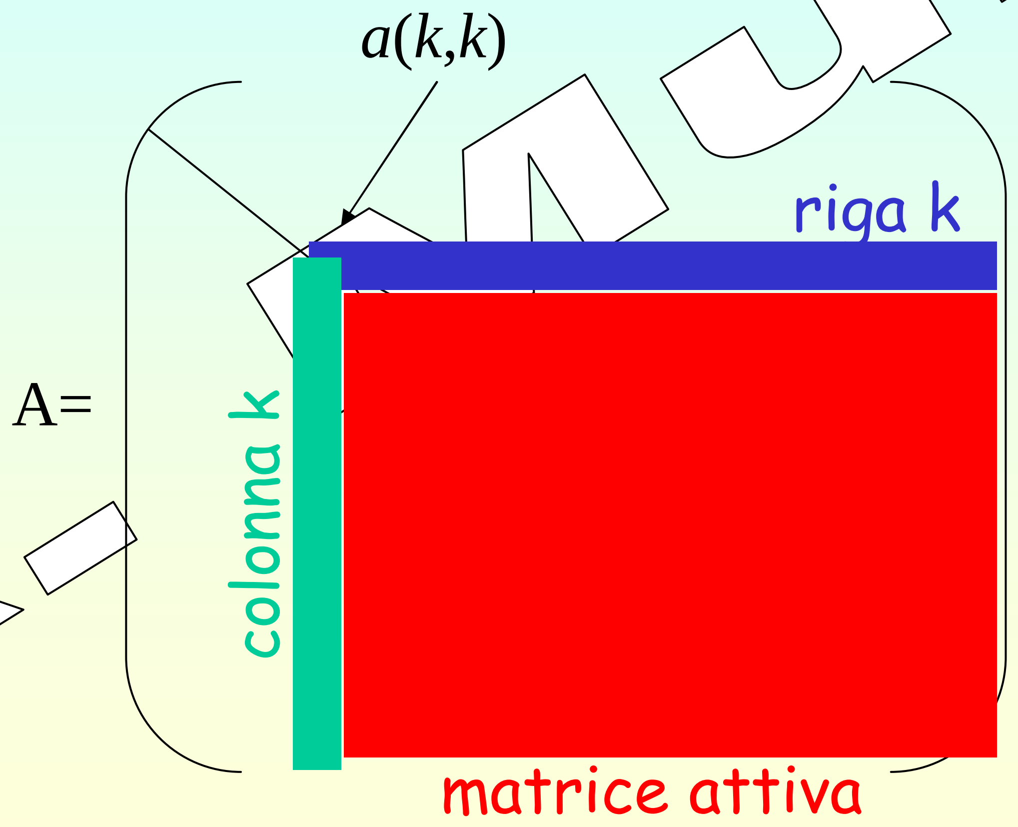
$A_{31} = L_{31}U_{11}$ $\quad \boxed{A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}}$ $\quad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$$\boxed{L_{32}\, U_{22} = A_{32} - L_{31}\, U_{12}}$$

cioè L_{32} e U_{22} si ottengono calcolando la fattorizzazione LU di $A_{32} - L_{31} U_{12}$

Ricordando l'algoritmo di fattorizzazione LU

Graficamente, al generico passo k:



..allo stesso modo procede la fattorizzazione LU a blocchi

$A_{11} = L_{11}U_{11}$	$A_{12} = L_{11}U_{12}$	$A_{13} = L_{11}U_{13}$
$A_{21} = L_{21}U_{11}$	$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$	$A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$
$A_{31} = L_{31}U_{11}$	$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$	$A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

$$A_{11} = L_{11}U_{11} \qquad A_{12} = L_{11}U_{12} \qquad A_{13} = L_{11}U_{13}$$

$$A_{21} = L_{21}U_{11} \qquad A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22} \qquad A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$$

$$A_{31} = L_{31}U_{11} \qquad A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22} \qquad A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$$

Passo 1 :

➤ fattorizzazione LU del "pannello verticale"

$$A^1 = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{11}U_{11} \\ L_{21}U_{11} \\ L_{31}U_{11} \end{pmatrix}$$

Calcolo dei blocchi $L_{11}, L_{21}, L_{31}, U_{11}$

$A_{11} = L_{11}U_{11}$	$A_{12} = L_{11}U_{12}$	$A_{13} = L_{11}U_{13}$
$A_{21} = L_{21}U_{11}$	$A_{22} = L_{21}U_{12} + L_{22}U_{22}$	$A_{23} = L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23}$
$A_{31} = L_{31}U_{11}$	$A_{32} = L_{31}U_{12} + L_{32}U_{22}$	$A_{33} = L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33}U_{33}$

- Calcola un pannello orizzontale di U

$$\begin{pmatrix} A_{12} & A_{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \end{pmatrix}$$

$$U_{12} = L_{11}^{-1}A_{12}\,, \quad U_{13} = L_{11}^{-1}A_{13}$$

- Aggiorna la matrice attiva

$$\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \overline{A}_{22} = A_{22} - L_{21}U_{12} & \overline{A}_{23} = A_{23} - L_{21}U_{13} \\ \overline{A}_{32} = A_{32} - L_{31}U_{12} & \overline{A}_{33} = A_{33} - L_{31}U_{13} \end{pmatrix}$$

Alla fine del passo 1 abbiamo calcolato

$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & & \\ L_{31} & & \end{pmatrix}$$

- Il primo pannello verticale di L

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- Il primo pannello orizzontale di U

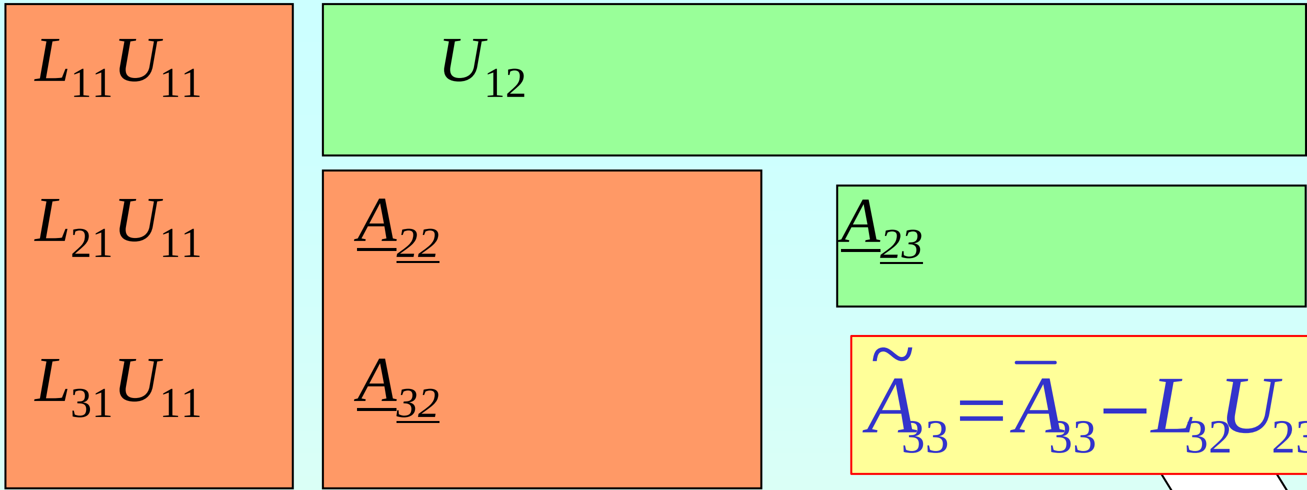
$$\begin{pmatrix} L_{11}U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ L_{21}U_{11} & \underline{A}_{22} & \underline{A}_{23} \\ L_{31}U_{11} & \underline{A}_{32} & \underline{A}_{33} \end{pmatrix}$$

Passo 2 :

- Calcola la fattorizzazione LU del pannello

$$\boxed{\begin{matrix} \underline{A}_{22} \\ \underline{A}_{32} \end{matrix}} \rightarrow \begin{pmatrix} L_{22}U_{22} \\ L_{32}U_{22} \end{pmatrix}$$

Calcola i blocchi L_{22}, L_{32}, U_{22}



$$\tilde{A}_{33} = \bar{A}_{33} - L_{32}U_{23}$$

- Calcola il pannello orizzontale di U

$$\underline{A}_{\underline{23}} = L_{22}U_{23} \Rightarrow U_{23} = L_{22}^{-1}\,\underline{A}_{23}$$

- Aggiorna la matrice attiva

$$\left(\bar{A}_{33}\right) \rightarrow \left(\tilde{A}_{33} = \bar{A}_{33} - L_{32}U_{23}\right)$$

Alla fine del passo 2 abbiamo calcolato

$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & \boxed{L_{22}} & \\ L_{31} & \boxed{L_{32}} & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & \boxed{U_{22}} & \boxed{U_{23}} \\ & & \end{pmatrix}$$

- Il secondo pannello verticale di L

- Il secondo pannello orizzontale di U

$L_{11}U_{11}$ | U_{12}

$L_{21}U_{11}$ | $L_{22}U_{22}$ | U_{23}

$L_{31}U_{11}$ | $L_{32}U_{22}$ | $\tilde{A}_{33} = \bar{A}_{33} - L_{32}U_{23}$

➤ Calcola la fattorizzazione LU del blocco

$$\left(\tilde{A}_{33}\right) = \left(L_{33}U_{33}\right)$$

Alla fine del passo 3 abbiamo

$$\begin{pmatrix} L_{11} & & \\ L_{21} & L_{22} & \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ & U_{22} & U_{23} \\ & & U_{33} \end{pmatrix}$$

⇓

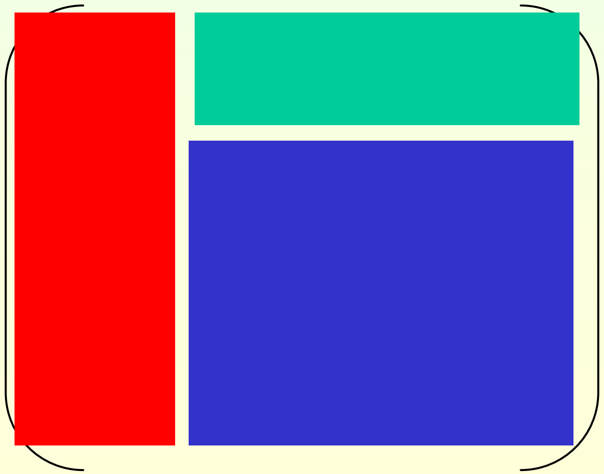
La fattorizzazione LU è completa

Algoritmo LU *Block-Partitioned*

A : decomposta in nxn blocchi di dimensione nb$\times$nb

for *k=1,n* step *nb* do
- applica la fatt. *LU* al pannello *A(k:n,k:k+nb-1)*
- calcola il pannello *U(k:k+nb-1,k+nb:n)*
- aggiorna la matrice attiva

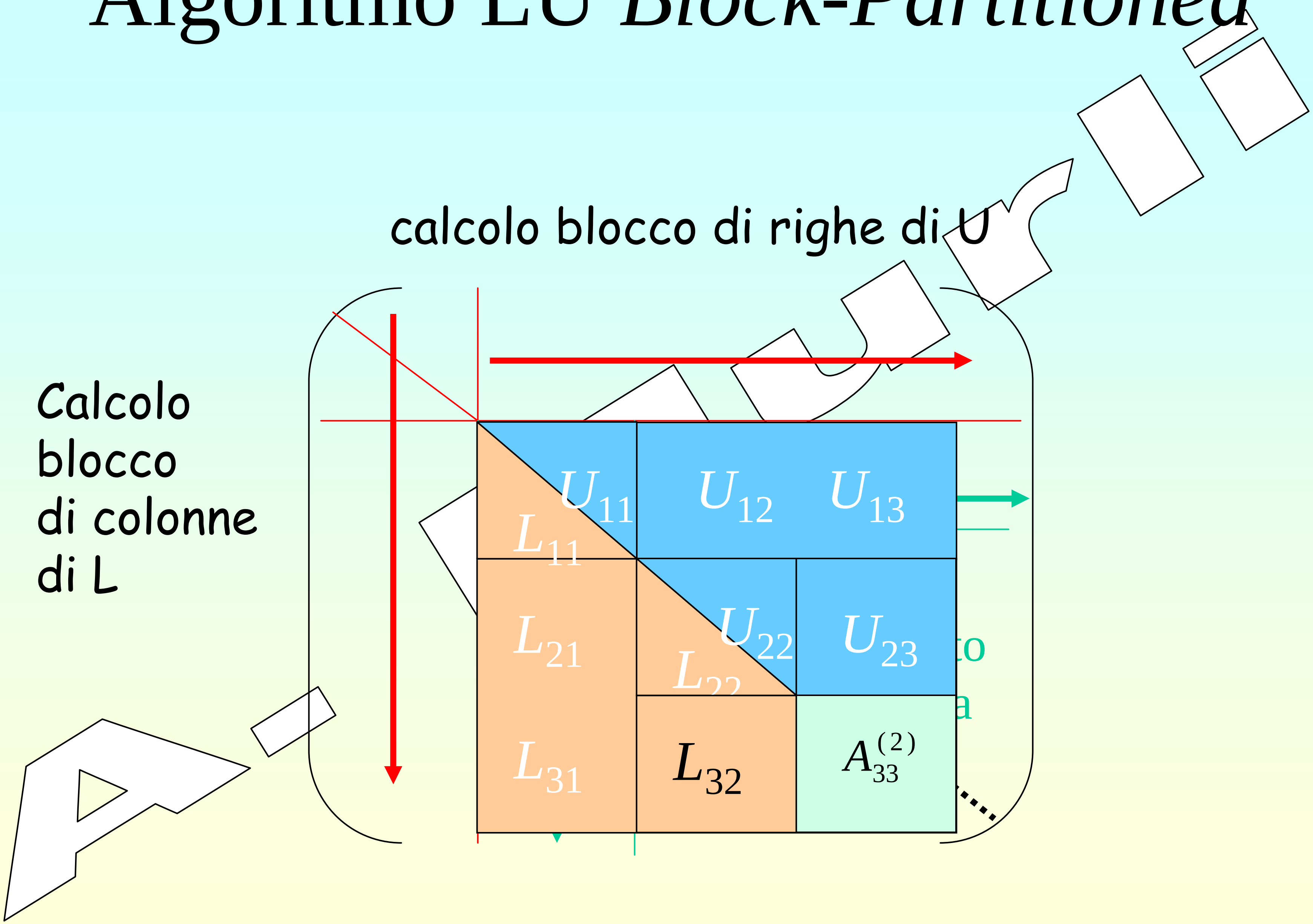
endfor



Algoritmo LU *Block-Partitioned*

calcolo blocco di righe di U

Calcolo
blocco
di colonne
di L



Osservazione:

Nelle operazioni

$$U_{12} = L_{11}^{-1} A_{12},$$

$$U_{13} = L_{11}^{-1} A_{13}$$

$$U_{23} = L_{22}^{-1} \underline{A}_{23}$$

$\Longleftrightarrow$

$$L_{11} \boxed{U_{12}} = \underline{A}_{12}$$

$$L_{11} \boxed{U_{13}} = \underline{A}_{13}$$

$$L_{22} \boxed{U_{23}} = \underline{A}_{23}$$

I blocchi di L sono noti e i blocchi di A sono noti

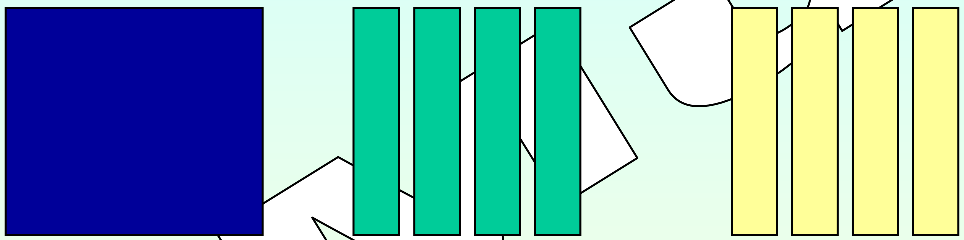
Le incognite sono i blocchi di U

$\Downarrow$

Risoluzione di sistemi lineari multipli

Risoluzione di sistema lineare multiplo:

$$L_{11} \quad U_{12} \quad = \quad \underline{A}_{12}$$



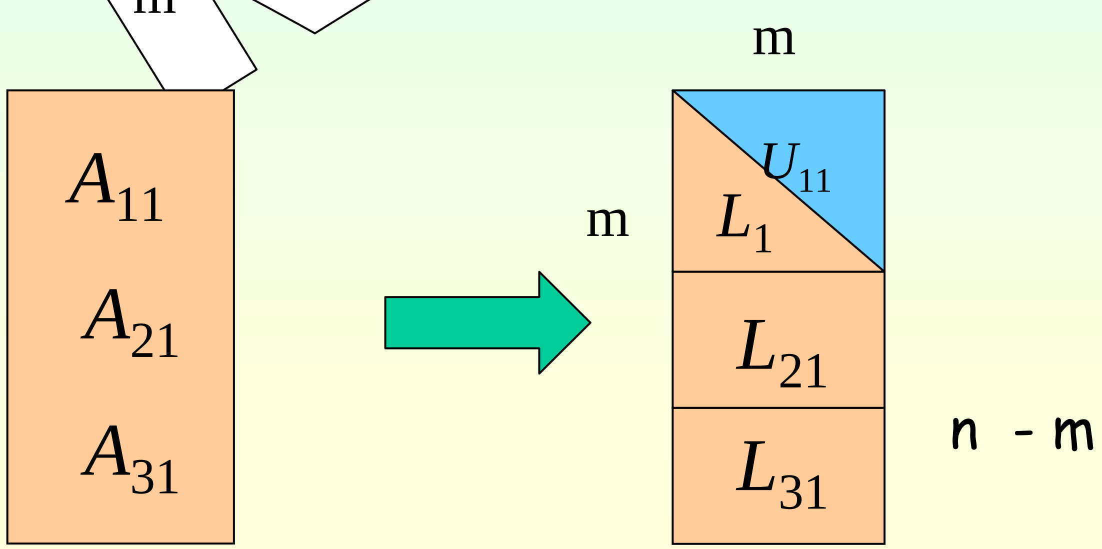
Risoluzione di diversi sistemi lineari in cui

- la matrice dei coefficienti L_{11} è **la stessa**
- il termine noto è il vettore **colonna della matrice** A_{12}
- il vettore soluzione è il **vettore colonna** della matrice U_{12}

Fattorizzazione LU di una matrice rettangolare (n x m, con n >>m: pannello verticale)

$$
n\left\{\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{11} \\ A_{11} \end{bmatrix}\right. = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} U_{11} \end{bmatrix}
$$

m



Nuclei computazionali fondamentali

Ad ogni passo:

- Fattorizzazione LU
- Risoluzione di sistemi triangolari a termine noto multiplo
- Prodotto matrice-matrice