Calcolo Parallelo e Distribuito I

A. Murli

a.a. 2006-2007

Problema …

Progettare un algoritmo parallelo
per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari
con matrice triangolare su un calcolatore MIMD
a Memoria Distribuita con p processori

Problema …

Sistemi triangolari

Sistemi triangolari inferiori

$$\begin{cases} a_{00}x_0 = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Forward Substitution

(x_0 , x_1 , x_2)

Sistemi triangolari superiori

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 = b_0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Backward Substitution

(x_2 , x_1 , x_0)

Sistemi triangolari inferiori …

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots & = \vdots \\
a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n
\end{cases}
$$

Algoritmo di Forward Substitution

$$
\begin{cases}
x_0 = b_0 / a_{00} \\
x_i = \left(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j \right) \Big/ a_{ii}
\end{cases}
$$

$\forall$ i= 1, … , n

Sistemi triangolari inferiori …

$$\begin{cases} a_{00}x_0 & = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots & = \vdots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

Procedendo "per righe"
il valore di ogni componente
del vettore soluzione
dipende
da quello delle precedenti
(PIPELINE)

Sistemi triangolari inferiori …

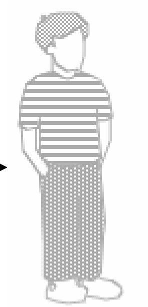
Come e dove introdurre il parallelismo?

Nella sequenza dei passi temporali …..

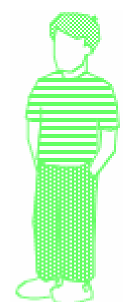
I Strategia : Distribuzione dei dati per righe …

Consideriamo un sistema di dimensione n=6 e 2 Studenti

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$



Studente 1

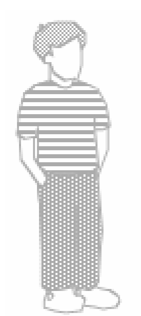


Studente 2

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + spedizione a Studente 2

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

Calcola (x_0, x_1, x_2) risolvendo il sistema Triangolare Inferiore

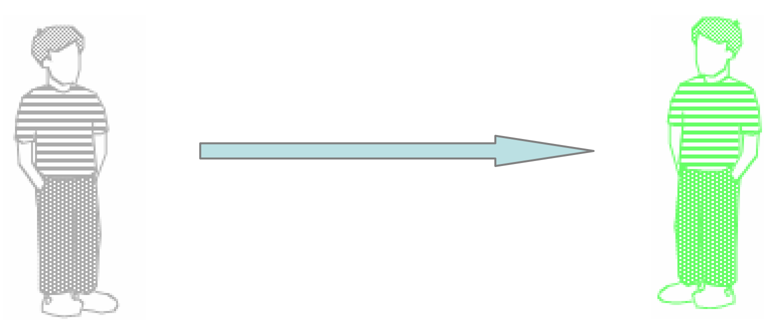


Studente 1

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + spedizione a Studente 2

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

Invia
(x_0, x_1, x_2)



Studente 1

Studente 2

(x_0, x_1, x_2)

Passo 1→ Studente 2: costruzione del sistema triangolare

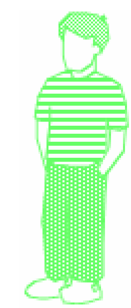
Valori noti

(x_0, x_1, x_2)

$$
\begin{cases}
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

Lo studente 2 costruisce il sistema triangolare di incognite **(x_3, x_4, x_5)** sottraendo al termine noto **(b_1, b_2, b_3)** i valori calcolati delle componenti **(x_0, x_1, x_2)** :

$$
\begin{cases}
a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) \\
a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2\right) \\
a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2\right)
\end{cases}
$$

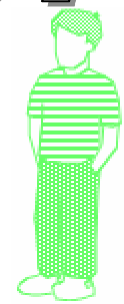


Studente 2

Passo 2→ Studente 2: risoluzione sistema triangolare

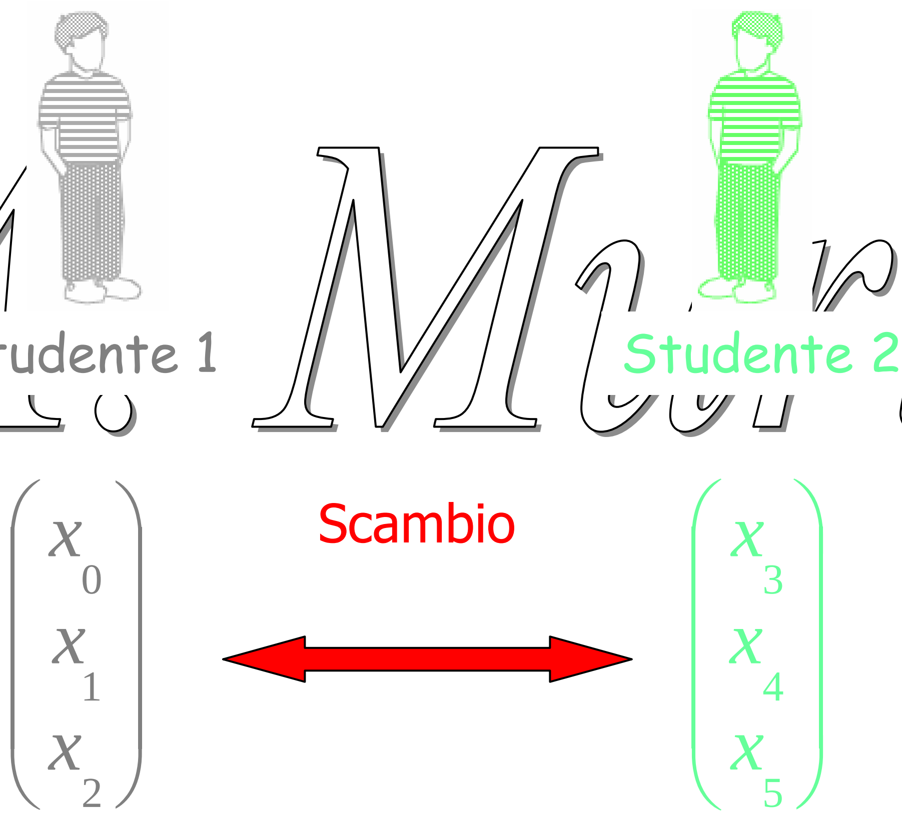
$$
\begin{cases}
a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) = \tilde{b}_3 \\
a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2\right) = \tilde{b}_4 \\
a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2\right) = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

Lo studente 2
calcola le componenti
(x_3 , x_4, x_5)
risolvendo il sistema
Triangolare Inferiore

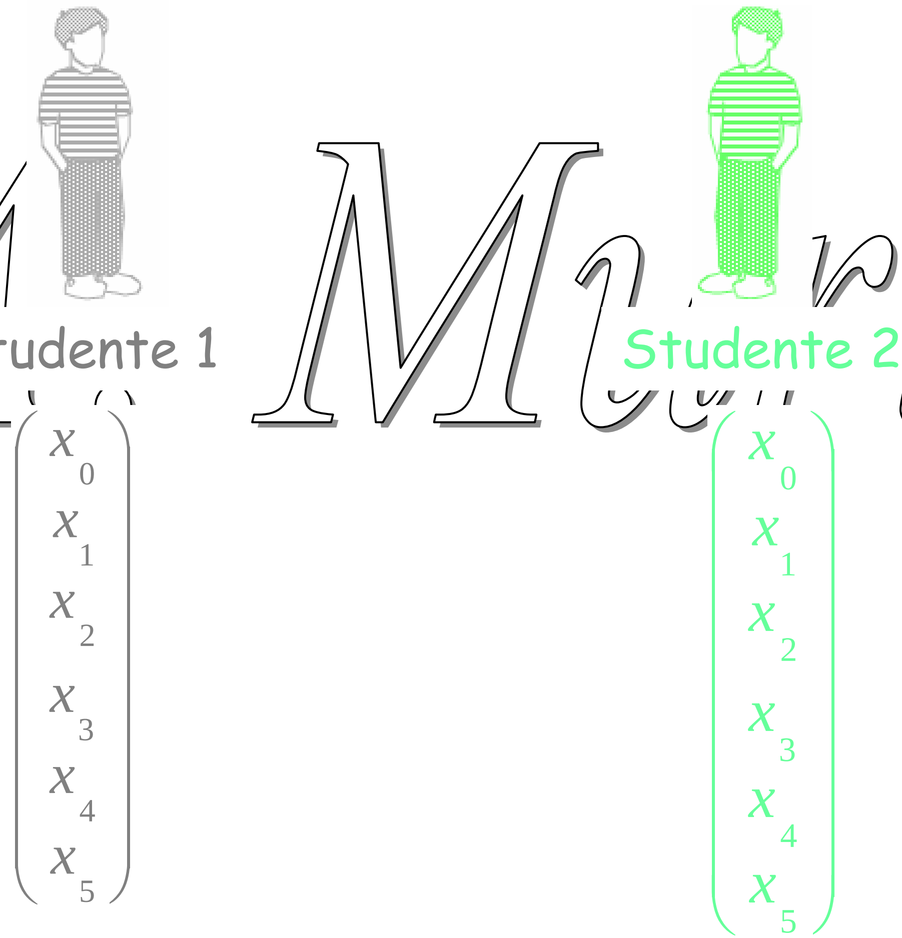


Studente 2

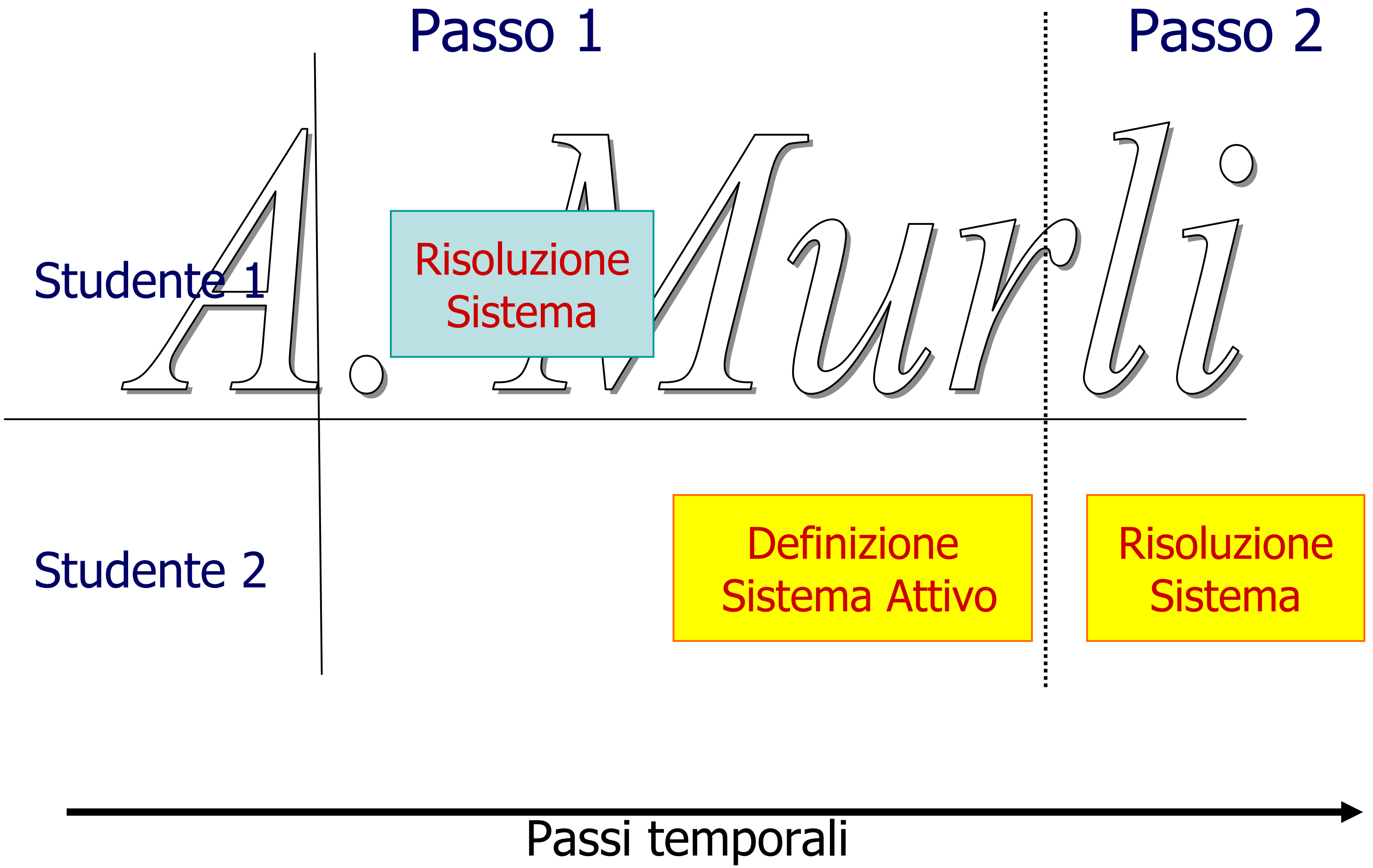
Collezione (gather) del vettore soluzione



Collezione (gather) del vettore soluzione



I Strategia

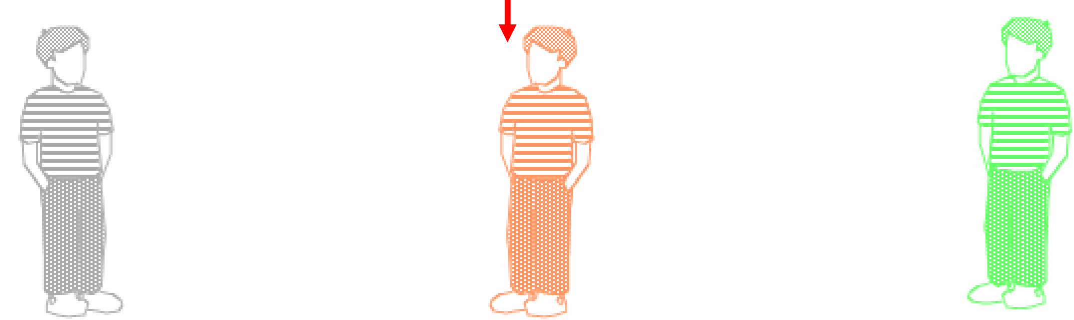


Passo 1
Passo 2
Studente 1
Risoluzione Sistema
Studente 2
Definizione Sistema Attivo
Risoluzione Sistema
Passi temporali

I Strategia: Distribuzione dei dati per righe

Consideriamo un sistema di dimensione n=6 e 3 Studenti

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

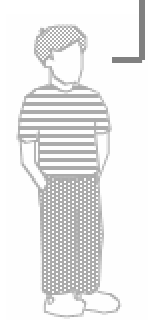


Studente 1 Studente 2 Studente 3

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + spedizione a Stud. 2 e 3

$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{array}{l} a_{00}x_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \end{array}} & = b_0 \\
& = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

Parte attiva del sistema globale



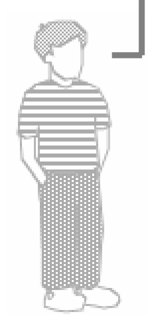
Studente 1

Lo studente 1
calcola le componenti (x_0, x_1)
risolvendo il sistema
Triangolare Inferiore

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + spedizione a Stud. 2 e 3

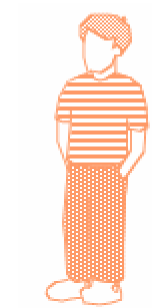
$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{aligned} & a_{00}x_0 \\ & a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \end{aligned}} & = b_0 \\
& = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

Parte attiva del sistema globale

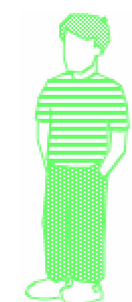


Studente 1

Lo studente 1
invia le componenti calcolate
(x_0, x_1) agli altri studenti



Studente 2



Studente 3

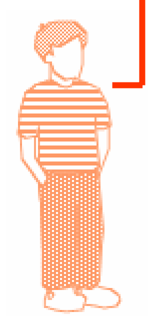
(X_0 , X_1)

Passo 1→ Studenti 2 e 3: definiscono il nuovo sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

Lo Studente2 definisce il sistema triangolare di incognite (x_2, x_3) sottraendo al termine noto (b_2, b_3) i valori calcolati delle componenti (x_0, x_1):

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 = b_2 - (a_{20}x_0 + a_{21}x_1) = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - (a_{30}x_0 + a_{31}x_1) = \tilde{b}_3
\end{cases}
$$



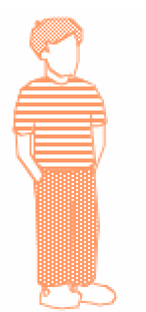
Studente 2

Passo 1→ Studenti 2 e 3: definiscono il nuovo sistema attivo

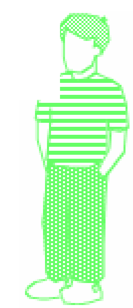
$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

Lo Studente3 definisce il suo sistema di incognite (x_2, x_3, x_4, x_5) sottraendo al termine noto (b_4, b_5) i valori calcolati a partire dalle componenti (x_0, x_1) :

$$
\begin{cases}
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1\right) = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1\right) = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$



Studente 2



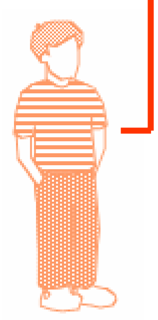
Studente 3

Passo 2→ Studente 2: risoluzione + spedizione a Studente 3

$$\begin{cases} a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\ a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

Parte attiva del sistema globale

Calcola le componenti (x_2, x_3)
risolvendo il sistema
Triangolare Inferiore

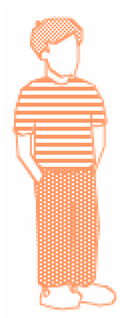


Studente 2

Passo 2→ Studente 2: risoluzione + spedizione a Studente 3

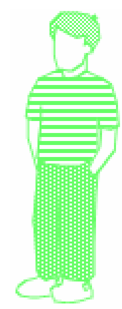
$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 & = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

Parte attiva del sistema globale



Studente 2

Invia le componenti calcolate
(x_2, x_3) allo studente 3



Studente 3

Passo 2 → Studente 3: definisce il nuovo sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 & = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

Lo studente3 definisce il sistema triangolare di incognite (x_4, x_5) sottraendo al termine noto $(\tilde{b}_4, \tilde{b}_5)$ i valori calcolati delle componenti (x_2, x_3):

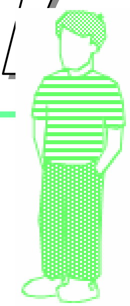
$$
\begin{cases}
a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 - (a_{42}x_2 + a_{43}x_3) = \hat{b}_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 - (a_{52}x_2 + a_{53}x_3) = \hat{b}_5
\end{cases}
$$

Studente 3

Passo 3 → Studente 3 : risoluzione sistema triangolare

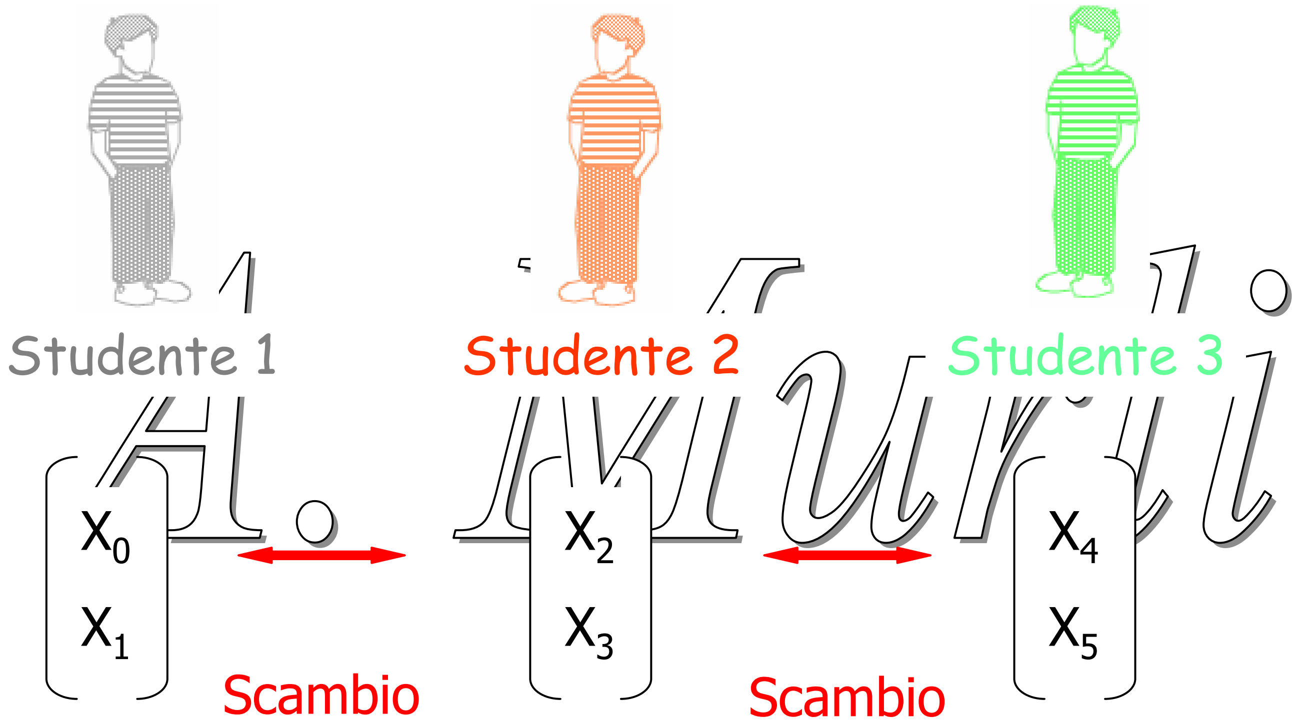
$$\begin{cases} a_{44}x_4 = \hat{b}_4 \\ a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5 \end{cases}$$

Calcola le componenti (x_4, x_5) risolvendo il sistema Triangolare Inferiore

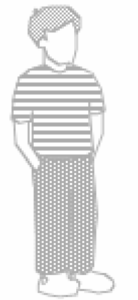


Studente 3

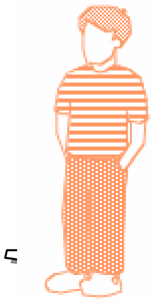
Collezione (gather) del vettore soluzione



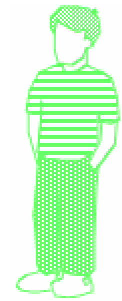
Collezione (gather) del vettore soluzione



Studente 1



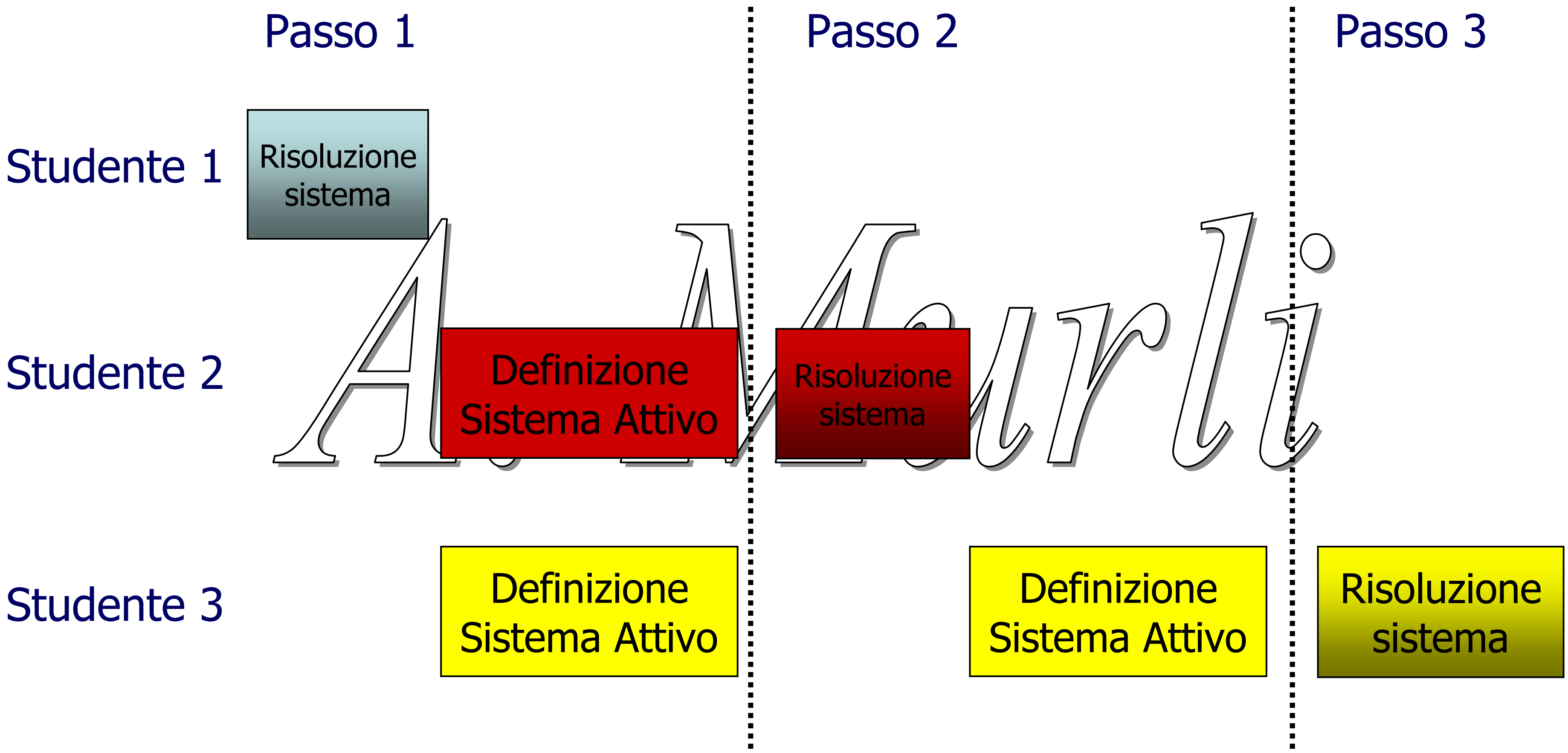
Studente 2



Studente 3

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

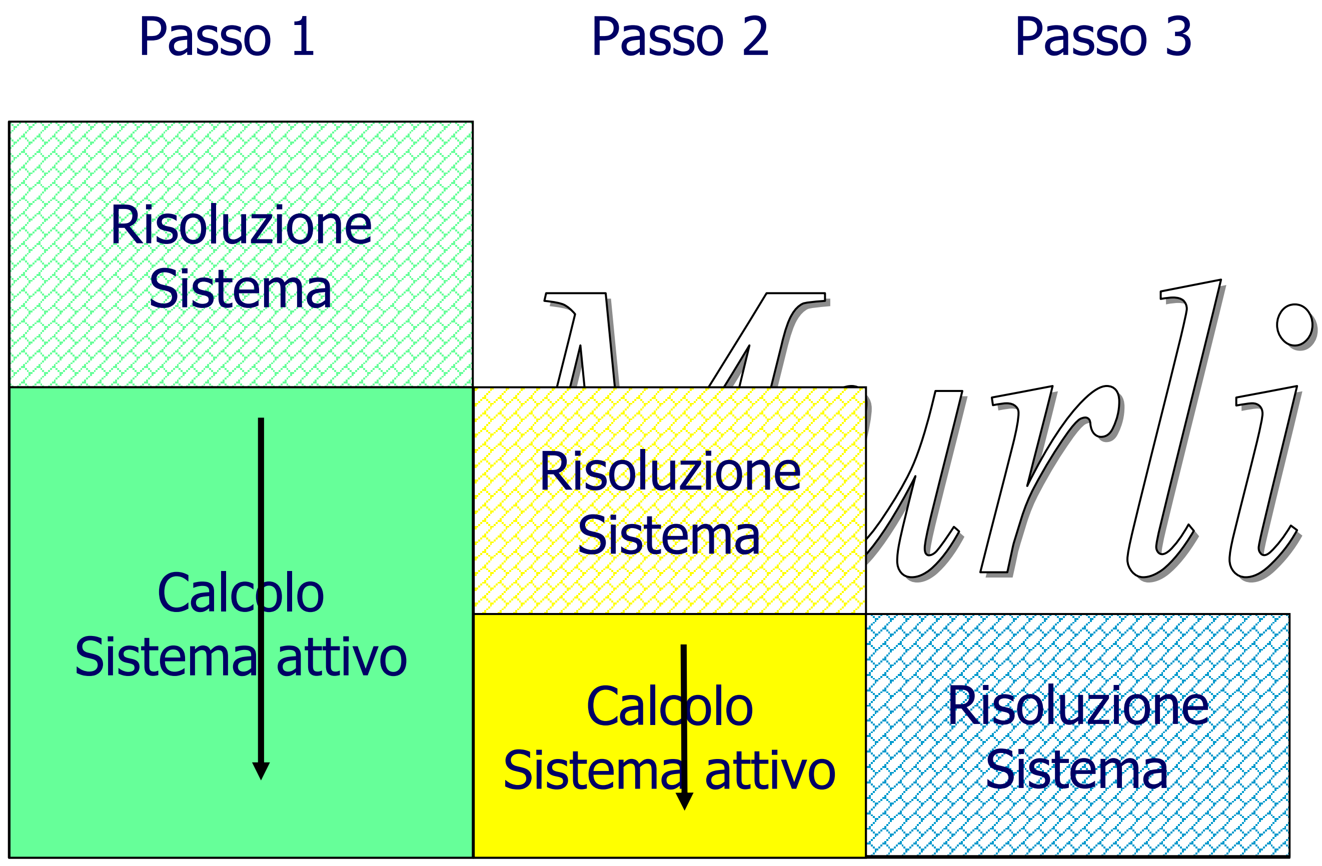
Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



PIPELINE TRA I PROCESSORI

Fasi di calcolo sulla matrice ad ogni passo:

A =



da un passo all'altro i primi processori non lavorano più

I Strategia: in generale…

Consideriamo un sistema di dimensione 2n ed n studenti

$$
\left\{
\begin{array}{llllllll}
a_{00}x_0 & & & & & & & = b_0 \\
a_{10}x_0 & + a_{11}x_1 & & & & & & = b_1 \\
a_{20}x_0 & + a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & & & & & = b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\
a_{(n-2)0}x_0 & + a_{(n-2)1}x_1 & + \cdots + \cdots + \cdots & + a_{(n-2)(n-2)}x_{n-2} & & & & = b_{n-2} \\
a_{(n-1)0}x_0 & + a_{(n-1)1}x_1 & + \cdots + \cdots + \cdots & + a_{(n-1)(n-2)}x_{n-2} & + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & & & = b_{n-1}
\end{array}
\right.
$$

Distribuzione dei dati tra gli n Studenti

I Strategia: in generale…

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots \\
a_{(n-2)0}x_0 + a_{(n-2)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-2)(n-2)}x_{n-2} & = b_{n-2} \\
a_{(n-1)0}x_0 + a_{(n-1)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_{n-2} + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & = b_{n-1}
\end{cases}
$$

Passo 1

P_0 risolve il sistema triangolare inferiore

$P_1\ P_2 \ldots P_{n-1}$ definiscono il sistema attivo

I Strategia: in generale…

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0\\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1\\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots\\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots\\
a_{(n-2)0}x_0 + a_{(n-2)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-2)(n-2)}x_{n-2} & = b_{n-2}\\
a_{(n-1)0}x_0 + a_{(n-1)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_{n-2} + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & = b_{n-1}
\end{cases}
$$

Passo 2

P_1 risolve il sistema triangolare inferiore

$P_2 \ldots P_{n-1}$ definiscono il sistema attivo

I Strategia: in generale…

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots & \vdots \\
a_{(n-2)0}x_0 + a_{(n-2)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-2)(n-2)}x_{n-2} & = b_{n-2} \\
a_{(n-1)0}x_0 + a_{(n-1)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_{n-2} + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & = b_{n-1}
\end{cases}
$$

Passo n

P_{n-1} risolve il sistema triangolare inferiore

I Strategia: Schema dell'algoritmo …

```
main{
/* Dichiarazione variabili ed Inizializzazione dell'ambiente MPI */
/* Lettura e distribuzione dei dati */
:
/* Inizio fase di calcolo */
  for(i=0;i<nproc;i++)
 {
   inloc=i*nloc;
    /* Il processore che contiene il blocco diagonale al passo i risolve il
       sistema triangolare inferiore di dimensione nloc*nloc */
    if(menum==i)
   {
     x[inloc]=b[0]/a[0][inloc];
     s=1;
     for(j=inloc+1;j<inloc+nloc;j++)
     {
         sum=0.;
         for(k=inloc;k<j;k++)
         {
             sum+=a[s][k]*x[k];
         }
         x[j]=(b[s]-sum)/a[s][j];
         s++;
     }
     for(j=i+1;j<nproc;j++)
     {
```

I Strategia: Schema dell'algoritmo …

```
if(menum==i)
{
 x[inloc]=b[0]/a[0][inloc];
 s=1;
 for(j=inloc+1;j<inloc+nloc;j++)
 {
    sum=0.;
    for(k=inloc;k<j;k++)
    {
       sum+=a[s][k]*x[k];
    }
    x[j]=(b[s]-sum)/a[s][j];
    s++;
 }
 for(j=i+1;j<nproc;j++)
 {
   tag=j+77+i;
   MPI_Send(&x[inloc],nloc,MPI_FLOAT,j,tag,MPI_COMM_WORLD);
 }
}
/* I processori che il cui identificativo è maggiore del passo i devono
   aggiornare il termine noto b del sistema */
if(menum>i)
{
  tag=menum+77+i;
```

I Strategia: Schema dell’algoritmo …

```
        x[j]=(b[s]-sum)/a[s][j];
        s++;
    }
    for(j=i+1;j<nproc;j++)
    {
     tag=j+77+i;
     MPI_Send(&x[inloc],nloc,MPI_FLOAT,j,tag,MPI_COMM_WORLD);
    }
  }
  /* I processori che il cui identificativo è maggiore del passo devono
     aggiornare il termine noto del sistema */
  if(menum>i)
  {
     tag=menum+77+i;
MPI_Rcve(&x[inloc],nloc, MPI_FLOAT,i,tag,MPI_COMM_WORLD,&status);
     for(j=0;j<nloc;j++)
     {
        sum2=0.;
        for(k=inloc;k<inloc+nloc;k++)
        {
            sum2+=a[j][k]*x[k];
        }
        b[j]=b[j]-sum2;
     }
   }
```

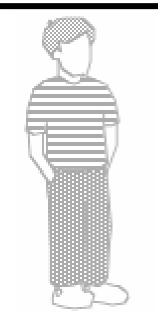
I Strategia: Schema dell'algoritmo …

```
        tag=j+77+i;
        MPI_Send(&x[inloc],nloc,MPI_FLOAT,j,tag,MPI_COMM_WORLD);
      }
    }
    /* I processori che il cui identificativo è maggiore del passo devono
       aggiornare il termine noto del sistema */
    if(menum>i)
    {
       tag=menum+77+i;
 MPI_Rcve(&x[inloc],nloc, MPI_FLOAT,i,tag,MPI_COMM_WORLD,&status);
       for(j=0;j<nloc;j++)
       {
          sum2=0.;
          for(k=inloc;k<inloc+nloc;k++)
          {
              sum2+=a[j][k]*x[k];
          }
          b[j]=b[j]-sum2;
        }
     }
  }
  MPI_Bcast(x,n,MPI_FLOAT,nproc-1,MPI_COMM_WORLD);
  /* Inizio fase di stampa */
 :
 }
```

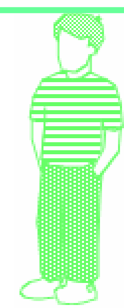
II Strategia: distribuzione dei dati per colonne

Consideriamo un sistema di dimensione n=6 e 2 Studenti

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$



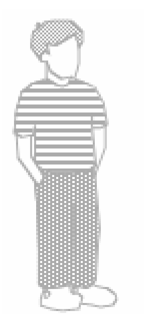
Studente 1



Studente 2

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}$$

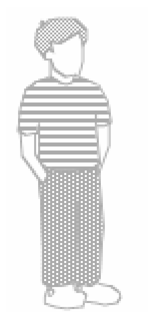


Studente 1

Lo studente 1 risolve il sistema triangolare inferiore e determina le incognite (x_0, x_1, x_2)

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

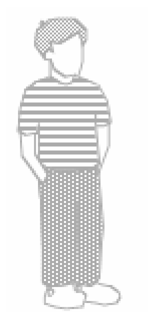


Studente 1

Lo studente 1 definisce il nuovo sistema attivo sottraendo alle componenti del termine noto (b_3, b_4, b_5) i coefficienti calcolati mediante (x_0, x_1, x_2)

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) = \tilde{b}_3 \\
a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2\right) = \tilde{b}_4 \\
a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2\right) = \tilde{b}_5
\end{cases}$$

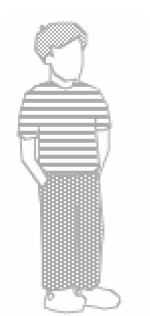


Studente 1

Lo studente1 definisce il nuovo sistema attivo sottraendo alle componenti del termine noto (b_3, b_4, b_5) i coefficienti calcolati mediante (x_0, x_1, x_2)

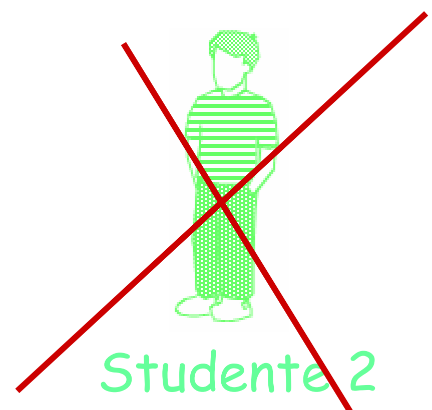
Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{33}x_3 = b_3 - \left(a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2\right) = \tilde{b}_3 \\
a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - \left(a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2\right) = \tilde{b}_4 \\
a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - \left(a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2\right) = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$



Studente 1

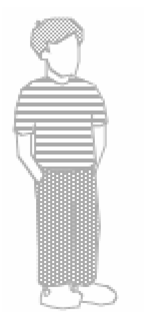
Lo studente 2 Non compie nessuna operazione



Studente 2

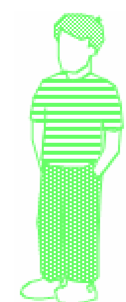
Passo 1 –> Studente 1 : spedizione dati a Studente 2

$$\left\{\begin{array}{l} a_{00}x_0 = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\ a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\ a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\ a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 \end{array}\right.$$


Studente 1

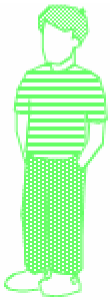
Lo Studente 1 spedisce allo Studente 2
le componenti del termine noto

$$\left(\tilde{b}_3, \tilde{b}_4, \tilde{b}_5\right)$$


Studente 2

Passo 2 –> Studente 2: risoluzione sistema triangolare

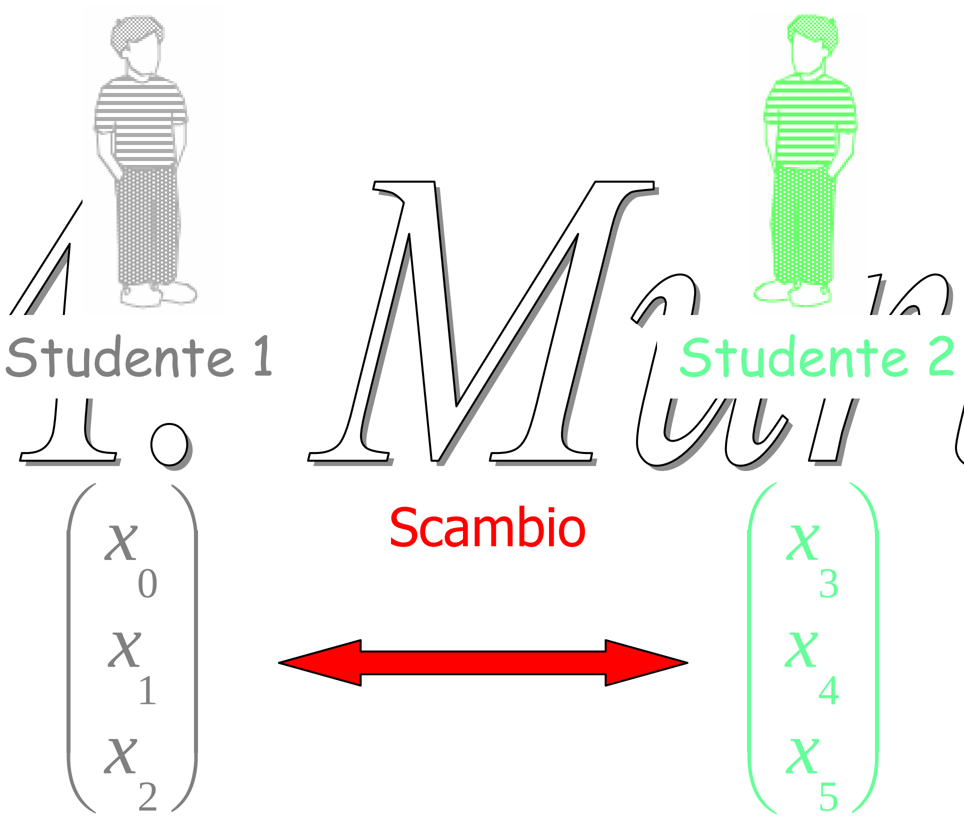
$$\begin{cases} a_{33}x_3 & = \tilde{b}_3 \\ a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = \tilde{b}_4 \\ a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \tilde{b}_5 \end{cases}$$



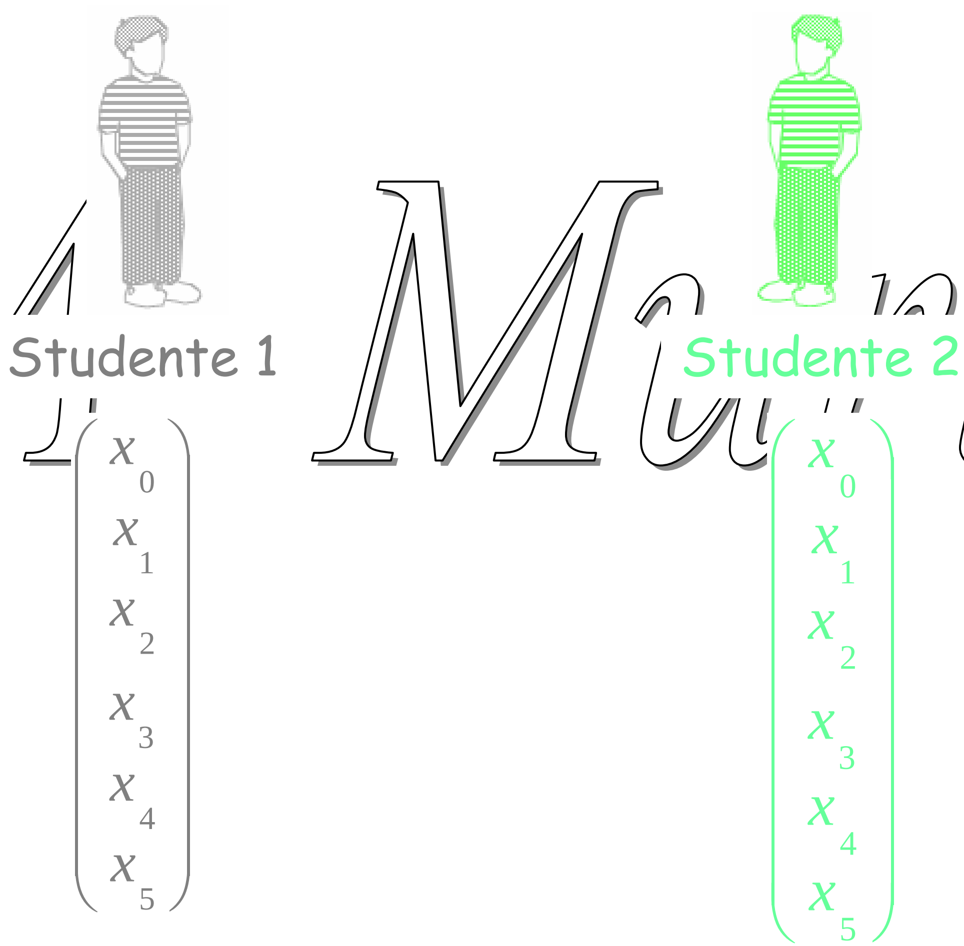
Studente 2

Lo studente 2
risolve il sistema
triangolare inferiore
e determina (x_3, x_4, x_5)

Collezione (gather) del vettore soluzione



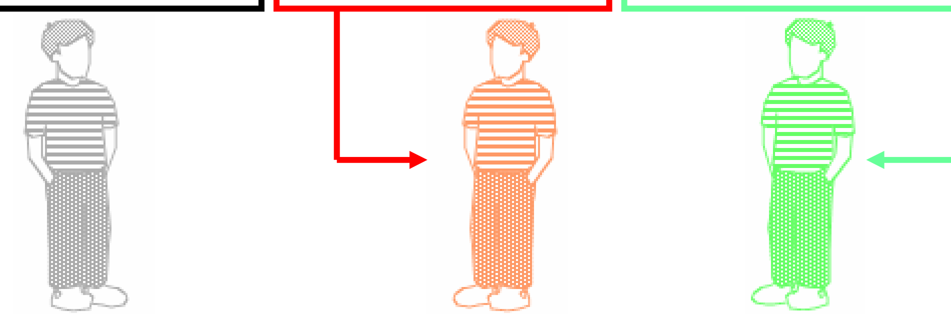
Collezione (gather) del vettore soluzione



II Strategia: distribuzione dei dati per colonne

Consideriamo un sistema di dimensione n=6 e p=3 Studenti

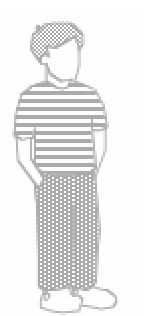
$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$



Studente 1 Studente 2 Studente 3

Passo 1 → Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{array}{l} a_{00}x_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} = b_0 \\ = b_1 \end{array}} \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = b_5
\end{cases}
$$

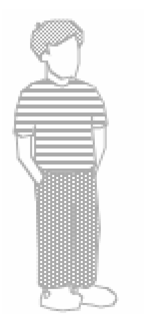


Studente 1

Lo studente1 risolve il sistema triangolare inferiore e determina le incognite (x_0, x_1)

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0\\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1\\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3\\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4\\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5
\end{cases}
$$

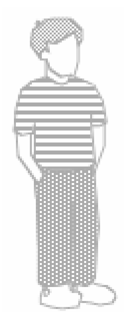


Studente 1

Lo studente 1 definisce il nuovo sistema attivo sottraendo alle componenti del termine noto (b_2, b_3, b_4, b_5) i coefficienti calcolati mediante (x_0, x_1)

Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{22}x_2 = b_2 - (a_{20}x_0 + a_{21}x_1) = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 - (a_{30}x_0 + a_{31}x_1) = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 - (a_{40}x_0 + a_{41}x_1) = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 - (a_{50}x_0 + a_{51}x_1) = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

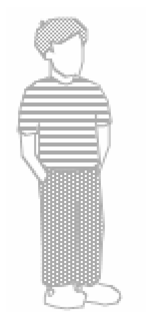


Studente 1

Lo studente 1 definisce il nuovo sistema attivo sottraendo alle componenti del termine noto (b_2, b_3, b_4, b_5) i coefficienti calcolati mediante (x_0, x_1)

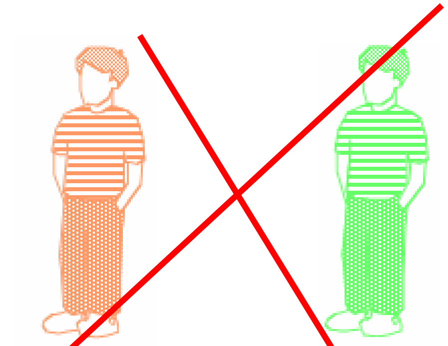
Passo 1→ Studente 1: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$



Studente 1

Gli studenti 2 e 3 Non compiono nessuna operazione



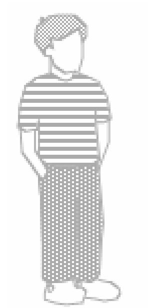
Studente 2 Studente 3

Passo 1 –> Studente 1 : spedizione dati a Studente 2

$$\begin{cases} a_{00}x_0 = b_0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\ a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\ a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

Lo Studente 1 spedisce allo Studente 2 le componenti del termine noto

$$\left(\tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \tilde{b}_4, \tilde{b}_5\right)$$

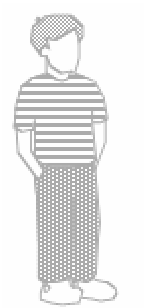


Studente 1

Studente 2

Passo 1 –> Studente 1 : spedizione dati a Studente 2

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$



Studente 1

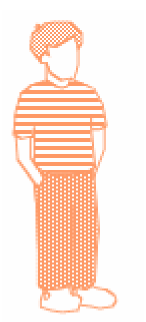
Lo Studente 1 non invia nulla allo Studente 3

Studente 2

Studente 3

Passo 2→ Studente 2: risoluzione + definizione sistema attivo

$$\begin{cases} a_{22}x_2 & = \tilde{b}_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & = \tilde{b}_3 \\ a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 & = \tilde{b}_4 \\ a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \tilde{b}_5 \end{cases}$$

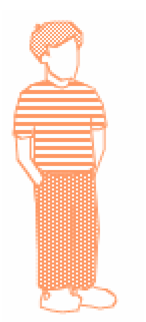


Studente 2

Lo studente2 risolve il sistema triangolare inferiore e determina le incognite (x_2, x_3)

Passo 2→ Studente 2: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5
\end{cases}
$$

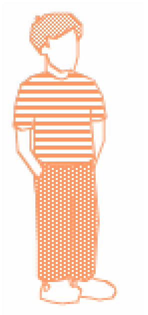


Studente 2

Lo studente 2 definisce il nuovo sistema attivo sottraendo alle componenti del termine noto $(\tilde{b}_4, \tilde{b}_5)$ i coefficienti calcolati mediante (x_2, x_3)

Passo 2→ Studente 2: risoluzione + definizione sistema attivo

$$\begin{cases} a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\ a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 - \left(a_{42}x_2 + a_{43}x_3\right) = \hat{b}_4 \\ a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 - \left(a_{52}x_2 + a_{53}x_3\right) = \hat{b}_5 \end{cases}$$

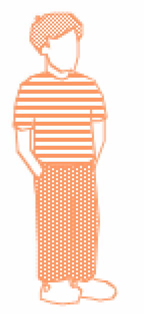


Studente 2

Lo studente 2 definisce il nuovo sistema attivo sottraendo alle componenti del termine noto $(\tilde{b}_4, \tilde{b}_5)$ i coefficienti calcolati mediante (x_2, x_3)

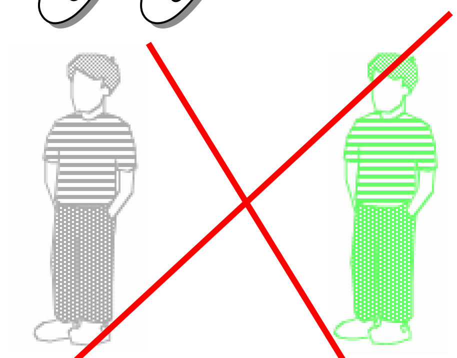
Passo 2→ Studente 2: risoluzione + definizione sistema attivo

$$
\begin{cases}
\boxed{\begin{aligned} a_{22}x_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{aligned}} & \begin{aligned} &= \tilde{b}_2 \\ &= \tilde{b}_3 \end{aligned} \\
\qquad a_{44}x_4 & = \hat{b}_4 \\
\qquad a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \hat{b}_5
\end{cases}
$$



Studente 2

Gli studenti 1 e 3 Non compiono nessuna operazione



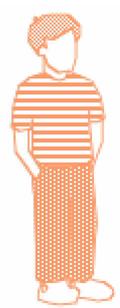
Studente 1 Studente 3

Passo 2 –> Studente 2 : spedizione dati a Studente 3

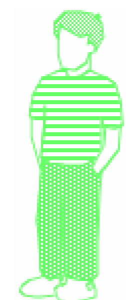
$$
\begin{cases}
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{44}x_4 = \hat{b}_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5
\end{cases}
$$

Lo Studente 2 spedisce allo Studente 3 le componenti del termine noto

$$\left(\hat{b}_4, \hat{b}_5\right)$$



Studente 2



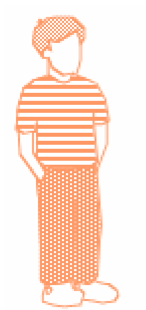
Studente 3

Passo 2 –> Studente 2 : spedizione dati a Studente 3

$$\begin{cases} \boxed{\begin{array}{l} a_{22}x_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{array}} & = \boxed{\begin{array}{l}\tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3\end{array}} \\ \quad a_{44}x_4 & = \hat{b}_4 \\ \quad a_{54}x_4 + a_{55}x_5 & = \hat{b}_5 \end{cases}$$

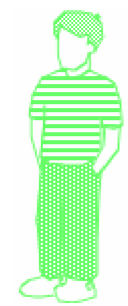
Lo Studente 2 Non spedisce nulla

allo Studente 1



Studente 2

Studente 1

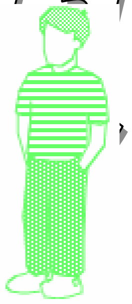


Studente 3

Passo 3 –> Studente 3: risoluzione sistema triangolare

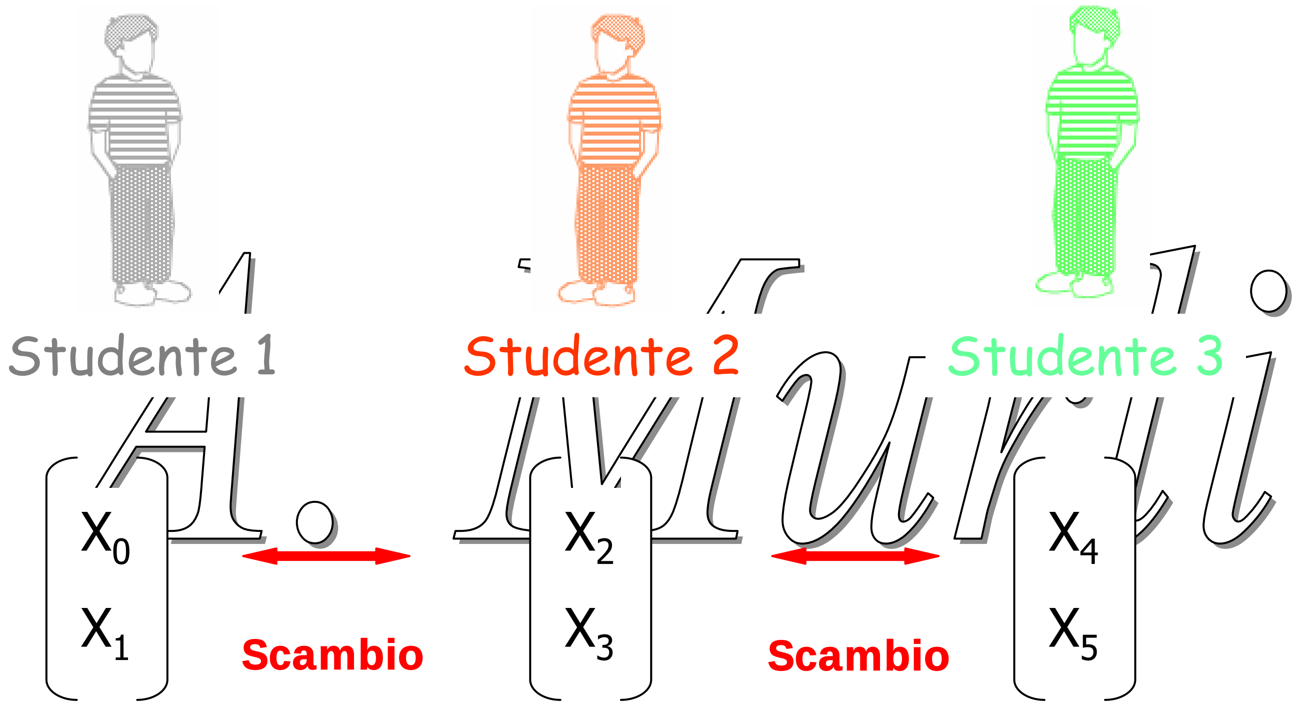
$$\begin{cases} a_{44}x_4 = \hat{b}_4 \\ a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5 \end{cases}$$

Lo studente 3
risolve il sistema triangolare inferiore
e determina (x_4, x_5)

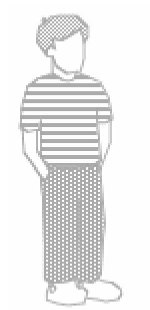


Studente 3

Collezione (gather) del vettore soluzione



Collezione (gather) del vettore soluzione

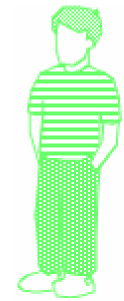


Studente 1

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Studente 2

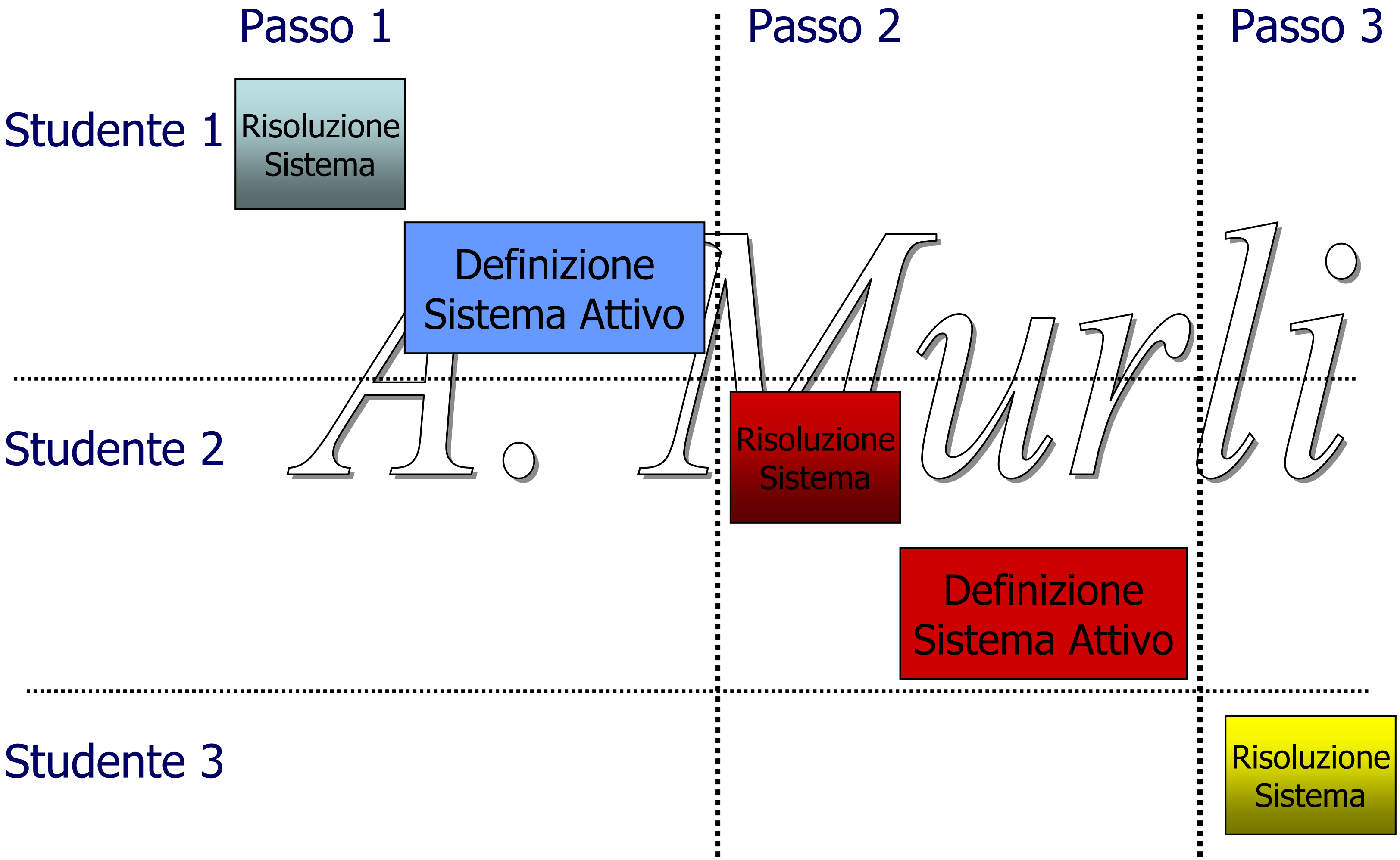
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$



Studente 3

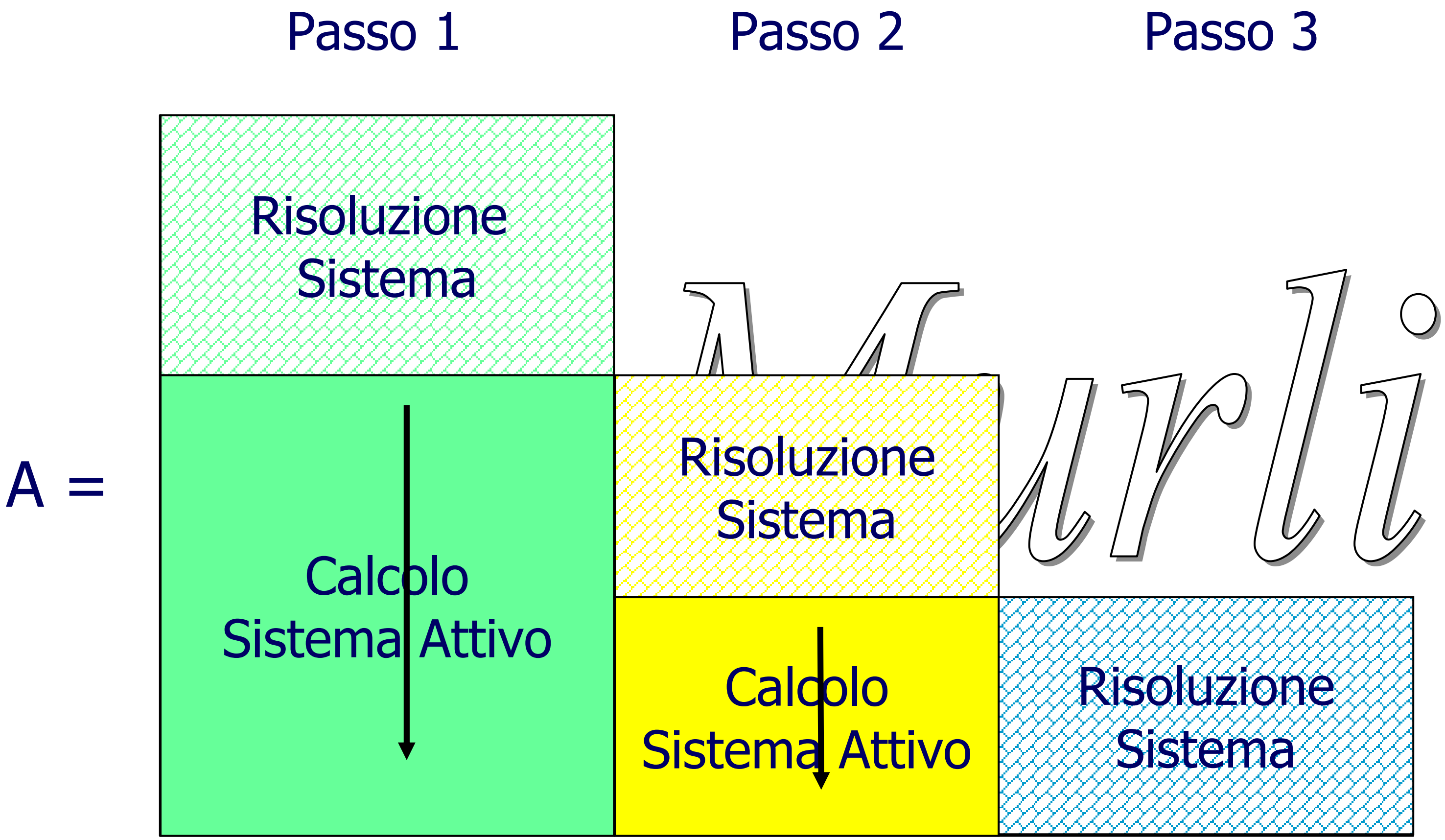
$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



PIPELINE SENZA INTERSEZIONI

Fasi di calcolo sulla matrice ad ogni passo:



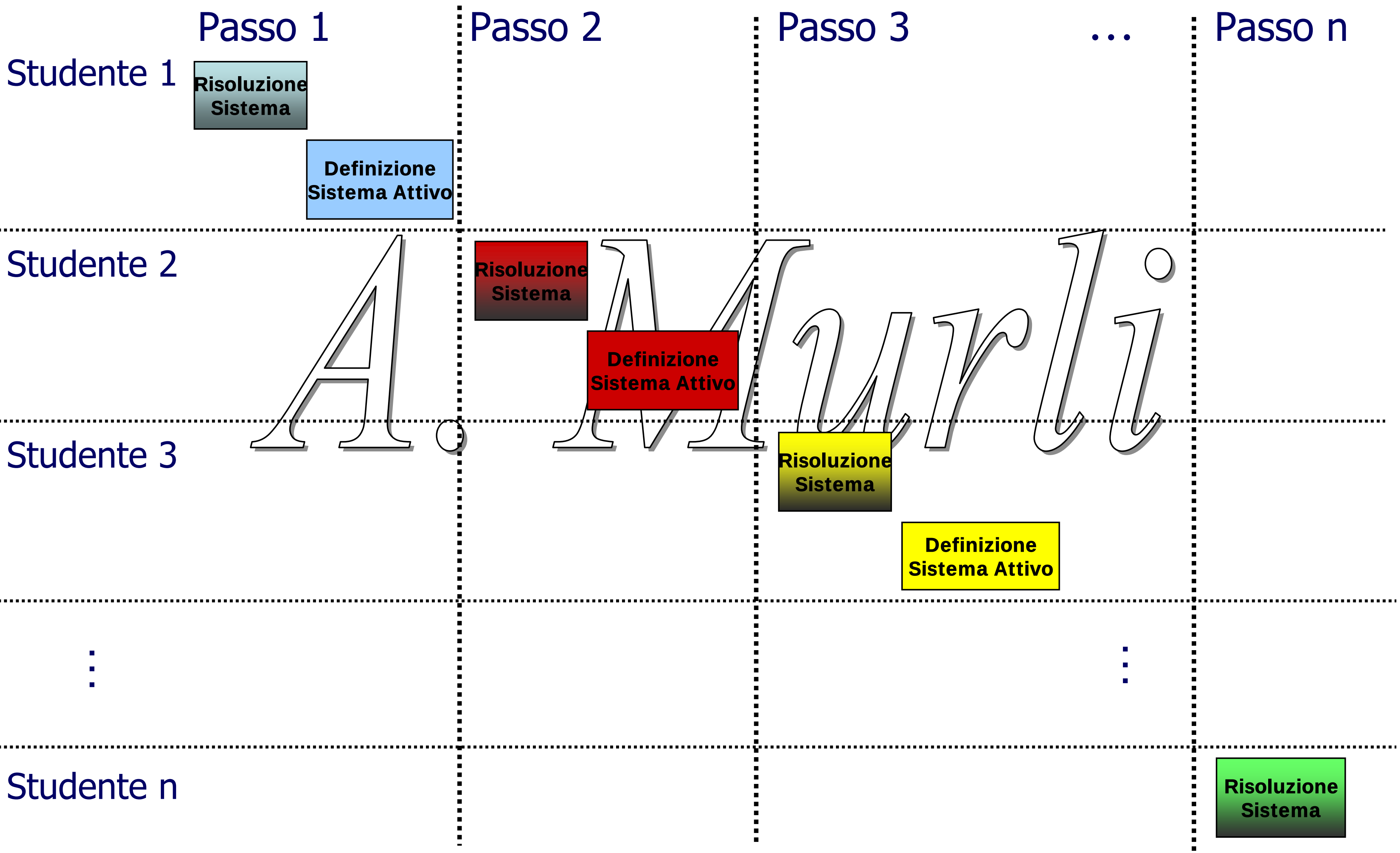
Ad ogni passo lavora solo 1 processore!

II Strategia: in generale

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 & = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 & = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots & \vdots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots & \vdots \\
a_{(n-2)0}x_0 + a_{(n-2)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-2)(n-2)}x_{n-2} & = b_{n-2} \\
a_{(n-1)0}x_0 + a_{(n-1)1}x_1 + \cdots + \cdots + \cdots + a_{(n-1)(n-2)}x_{n-2} + a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} & = b_{n-1}
\end{cases}
$$

Distribuzione dei dati tra gli n alunni

Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



PIPELINE SENZA INTERSEZIONI

I e II Strategia: osservazioni

A causa della struttura della matrice
e del workflow dell'algoritmo
una distribuzione non ciclica induce
un carico sui processori
fortemente sbilanciato

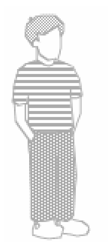
Domanda …

Cosa succede se distribuiamo i dati ciclicamente tra i processori ?

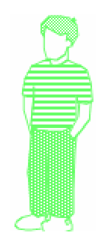
III Strategia: Distribuzione ciclica per blocchi di righe

Consideriamo un sistema di dimensione n=12 e p=3 Studenti

$$
\begin{array}{l|l}
1 & a_{00}x_0 = b_0 \\
 & a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
\hline
2 & a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
 & a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
\hline
3 & a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
 & a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \\
\hline
1 & a_{60}x_0 + a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = b_6 \\
 & a_{70}x_0 + a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = b_7 \\
\hline
2 & a_{80}x_0 + a_{81}x_1 + a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = b_8 \\
 & a_{90}x_0 + a_{91}x_1 + a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = b_9 \\
\hline
3 & a_{10,0}x_0 + a_{10,1}x_1 + a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = b_{10} \\
 & a_{11,0}x_0 + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = b_{11}
\end{array}
$$


Studente 1


Studente 2


Studente 3

Passo 1 → $\begin{cases} \text{Studente1: risoluzione+spedizione a TUTTI} \\ \text{TUTTI : definizione sistema attivo} \end{cases}$

Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{array}{ll}
1 & a_{00}x_0 = b_0 \\
 & a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
2 & a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
 & a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
3 & a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
 & a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \\
1 & a_{60}x_0 + a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = b_6 \\
 & a_{70}x_0 + a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = b_7 \\
2 & a_{80}x_0 + a_{81}x_1 + a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = b_8 \\
 & a_{90}x_0 + a_{91}x_1 + a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = b_9 \\
3 & a_{10,0}x_0 + a_{10,1}x_1 + a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = b_{10} \\
 & a_{11,0}x_0 + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = b_{11}
\end{array}
$$

Lo Studente 1 risolve il sistema triangolare inferiore
e spedisce le componenti calcolate (x_0 , x_1) agli altri studenti

TUTTI contribuiscono alla definizione del nuovo sistema attivo

Passo 1→ Studente1: risoluzione+spedizione a TUTTI
TUTTI : definizione sistema attivo

1

2
$$
\begin{aligned}
a_{22}x_2 &= \tilde{b}_2\\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= \tilde{b}_3
\end{aligned}
$$

3
$$
\begin{aligned}
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= \tilde{b}_4\\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 &= \tilde{b}_5
\end{aligned}
$$

1
$$
\begin{aligned}
a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 &= \tilde{b}_6\\
a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 &= \tilde{b}_7
\end{aligned}
$$

2
$$
\begin{aligned}
a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 &= \tilde{b}_8\\
a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 &= \tilde{b}_9
\end{aligned}
$$

3
$$
\begin{aligned}
+a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} &= \tilde{b}_{10}\\
+a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} &= \tilde{b}_{11}
\end{aligned}
$$

Si ottiene il seguente Sistema Attivo

Passo 2 → Studente2 : risoluzione+spedizione a TUTTI
TUTTI : definizione sistema attivo

Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{array}{c}
2 \\ \\ 3 \\ \\ 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
a_{22}x_2 = \tilde{b}_2 \\
a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \tilde{b}_3 \\
a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = \tilde{b}_4 \\
a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \tilde{b}_5 \\
a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \tilde{b}_6 \\
a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \tilde{b}_7 \\
a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \tilde{b}_8 \\
a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \tilde{b}_9 \\
a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \tilde{b}_{10} \\
a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \tilde{b}_{11}
\end{array}
\right.
$$

Lo Studente 2 risolve il sistema triangolare inferiore e spedisce le componenti calcolate (x_2 , x_3) agli altri studenti

TUTTI contribuiscono alla definizione del nuovo sistema attivo

Passo 2 → $\begin{cases}\text{Studente2 : risoluzione+spedizione a TUTTI} \\ \text{TUTTI : definizione sistema attivo}\end{cases}$

$$
\begin{array}{ll}
2 & \\
3 & \left\{\begin{array}{l}
a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5
\end{array}\right. \\
1 & \left\{\begin{array}{l}
a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \hat{b}_6 \\
a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \hat{b}_7
\end{array}\right. \\
2 & \left\{\begin{array}{l}
a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \hat{b}_8 \\
a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \hat{b}_9
\end{array}\right. \\
3 & \left\{\begin{array}{l}
+a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \hat{b}_{10} \\
+a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \hat{b}_{11}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Si ottiene il seguente Sistema Attivo

Passo 3 → $\begin{cases} \text{Studente3 : risoluzione+spedizione a TUTTI} \\ \text{TUTTI : definizione sistema attivo} \end{cases}$

Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{array}{ll}
3 & \left\{\begin{array}{l}
a_{44}x_4 = \hat{b}_4 \\
a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = \hat{b}_5
\end{array}\right. \\
1 & \left\{\begin{array}{l}
a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = \hat{b}_6 \\
a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \hat{b}_7
\end{array}\right. \\
2 & \left\{\begin{array}{l}
a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \hat{b}_8 \\
a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \hat{b}_9
\end{array}\right. \\
3 & \left\{\begin{array}{l}
a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \hat{b}_{10} \\
a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \hat{b}_{11}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Lo Studente 3 risolve il sistema triangolare inferiore
e spedisce le componenti calcolate (x_4 , x_5) agli altri studenti

TUTTI contribuiscono alla definizione del nuovo sistema attivo

Passo 3 → Studente3 : risoluzione+spedizione a TUTTI
TUTTI : definizione sistema attivo

3

1

$$a_{66}x_6 = \ddot{b}_6$$

$$a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \ddot{b}_7$$

2

$$a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \ddot{b}_8$$

$$a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \ddot{b}_9$$

3

$$+ a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \ddot{b}_{10}$$

$$+ a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \ddot{b}_{11}$$

Si ottiene il seguente Sistema Attivo

Passo 4 → { Studente 1 : risoluzione + spedizione a Stud. 2 e 3
Stud. 2,3 : definizione sistema attivo

Parte attiva del sistema triangolare

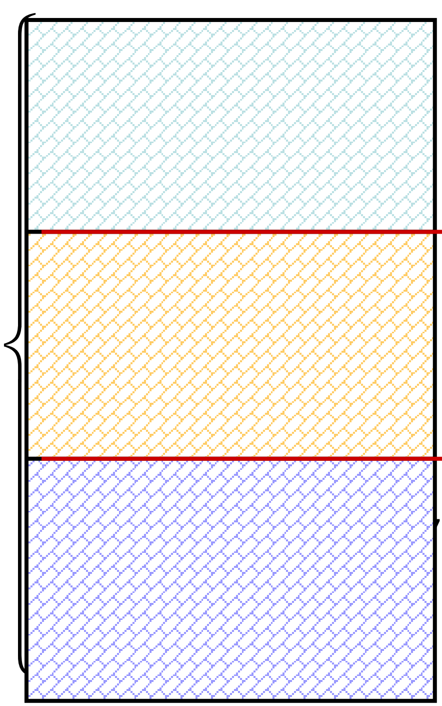
$$
\begin{array}{ll}
1 & \left\{\begin{array}{l}
a_{66}x_6 = \ddot{b}_6 \\
a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = \ddot{b}_7
\end{array}\right. \\
2 & \left\{\begin{array}{l}
a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = \ddot{b}_8 \\
a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \ddot{b}_9
\end{array}\right. \\
3 & \left\{\begin{array}{l}
a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \ddot{b}_{10} \\
a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \ddot{b}_{11}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

Murli

Lo Studente 1 risolve il sistema triangolare inferiore
e spedisce le componenti calcolate (x_6 , x_7) agli altri studenti

Gli Studenti 2 e 3 contribuiscono alla definizione del nuovo sistema attivo

Passo 4 → Studente 1 : risoluzione + spedizione a Tutti
Stud. 2,3 : definizione sistema attivo



$$a_{88}x_8 = \bar{b}_8$$
$$a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \bar{b}_9$$
$$+ a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \bar{b}_{10}$$
$$+ a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \bar{b}_{11}$$

Si ottiene il seguente Sistema Attivo

Passo 5 → Studente 2 : risoluzione + spedizione a Studente 3
Studente 3 : definizione sistema attivo

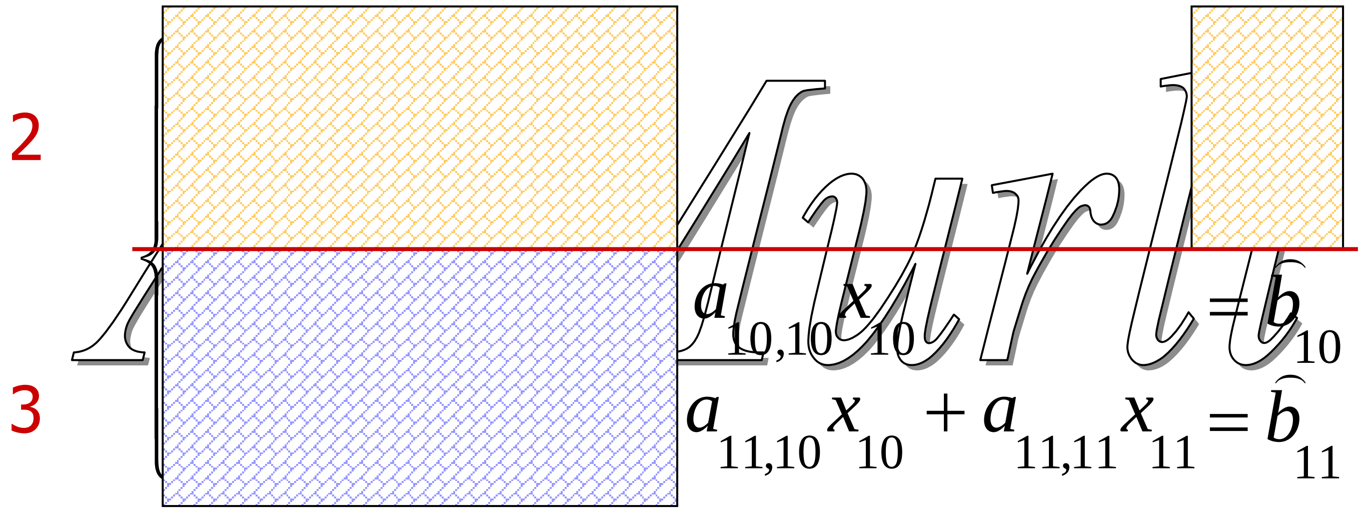
Parte attiva del sistema triangolare

$$
\begin{array}{l}
2 \\
\\
3 \\
\\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
a_{88}x_8 = \bar{b}_8 \\
a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = \bar{b}_9 \\
a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = \bar{b}_{10} \\
a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \bar{b}_{11}
\end{array}
\right.
$$

Lo Studente 2 risolve il sistema triangolare inferiore
e spedisce le componenti calcolate (x_8 , x_9) solo allo studente 3

Lo Studente 3 definisce il nuovo sistema attivo

Passo 5 → Studente 2 : risoluzione + spedizione a Studente 3
Studente 3 : definizione sistema attivo



$$\begin{cases} a_{10,10}x_{10} = \hat{b}_{10} \\ a_{11,10}x_{10} + a_{11,11}x_{11} = \hat{b}_{11} \end{cases}$$

Si ottiene il seguente Sistema Attivo

Passo 6 → Studente 3: risoluzione

Parte attiva del sistema triangolare

$$3 \qquad \begin{cases} a_{10,10}\,x_{10} = \widehat{b}_{10} \\ a_{11,10}\,x_{10} + a_{11,11}\,x_{11} = \widehat{b}_{11} \end{cases}$$

Lo studente 3 risolve il sistema triangolare inferiore calcolando le componenti (x_{10}, x_{11})

III Strategia: Distribuzione ciclica per blocchi di righe

La soluzione è così distribuita

Studente 1 Studente 2 Studente 3

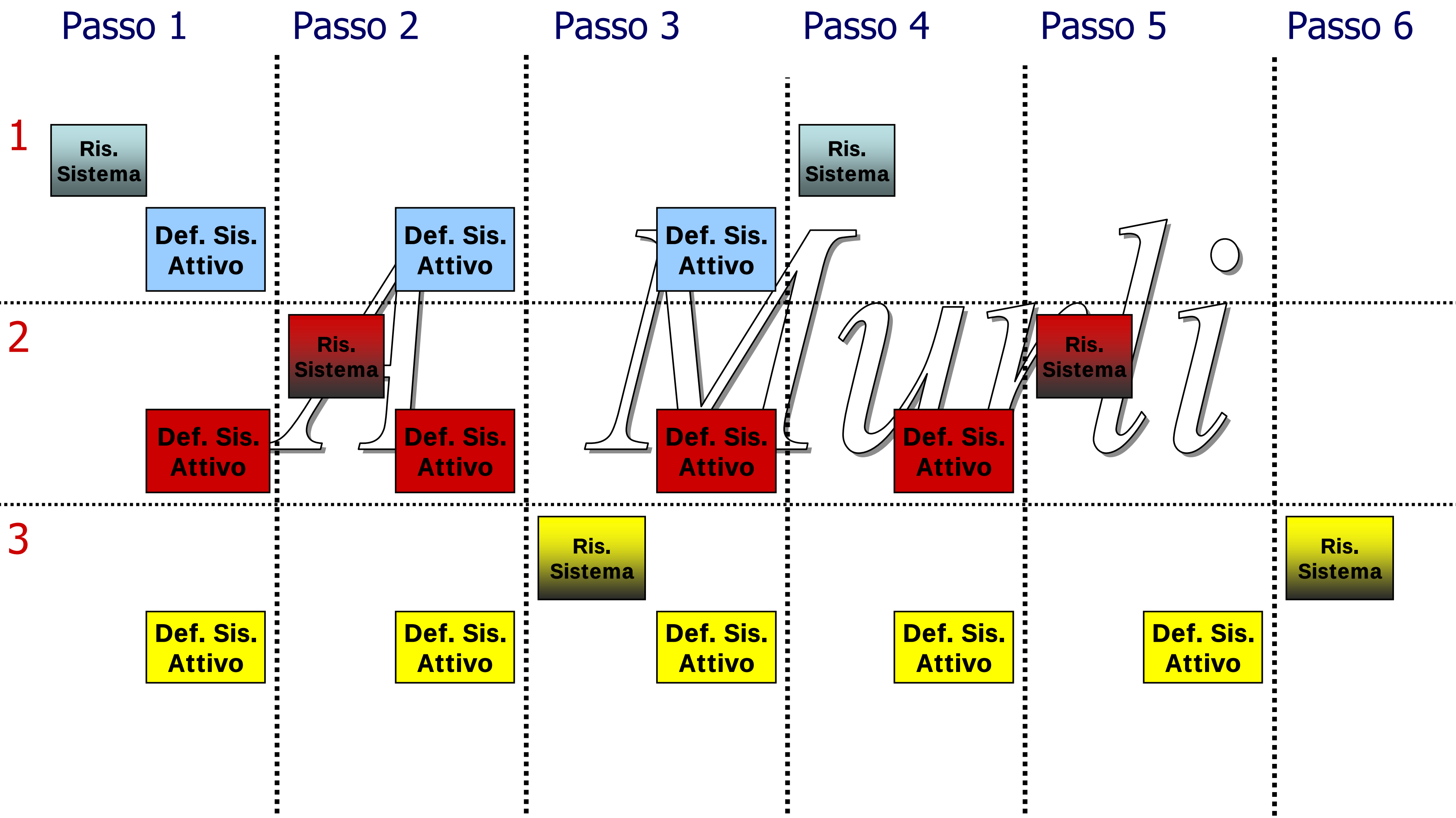
$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_8 \\ X_9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_{10} \\ X_{11} \end{pmatrix}$$

III Strategia: riassumendo

$$
\begin{cases}
a_{00}x_0 = b_0 \\
a_{10}x_0 + a_{11}x_1 = b_1 \\
a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \\
a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \\
a_{40}x_0 + a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \\
a_{50}x_0 + a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 + a_{55}x_5 = b_5 \\
a_{60}x_0 + a_{61}x_1 + a_{62}x_2 + a_{63}x_3 + a_{64}x_4 + a_{65}x_5 + a_{66}x_6 = b_6 \\
a_{70}x_0 + a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 + a_{75}x_5 + a_{76}x_6 + a_{77}x_7 = b_7 \\
a_{80}x_0 + a_{81}x_1 + a_{82}x_2 + a_{83}x_3 + a_{84}x_4 + a_{85}x_5 + a_{86}x_6 + a_{87}x_7 + a_{88}x_8 = b_8 \\
a_{90}x_0 + a_{91}x_1 + a_{92}x_2 + a_{93}x_3 + a_{94}x_4 + a_{95}x_5 + a_{96}x_6 + a_{97}x_7 + a_{98}x_8 + a_{99}x_9 = b_9 \\
a_{10,0}x_0 + a_{10,1}x_1 + a_{10,2}x_2 + a_{10,3}x_3 + a_{10,4}x_4 + a_{10,5}x_5 + a_{10,6}x_6 + a_{10,7}x_7 + a_{10,8}x_8 + a_{10,9}x_9 + a_{10,10}x_{10} = b_{10} \\
a_{11,0}x_0 + a_{11,1}x_1 + a_{11,2}x_2 + a_{11,3}x_3 + a_{11,4}x_4 + a_{11,5}x_5 + a_{11,6}x_6 + a_{11,7}x_7 + a_{11,8}x_8 + a_{11,9}x_9 + a_{11,10}x_{10} + a_{11,11} = b_{11}
\end{cases}
$$

Si aggiorna

Fasi eseguite dagli studenti ad ogni passo:



PIPELINE TRA I PROCESSORI

III Strategia:

Distribuendo ciclicamente la matrice tra i processori

migliora il bilanciamento del carico

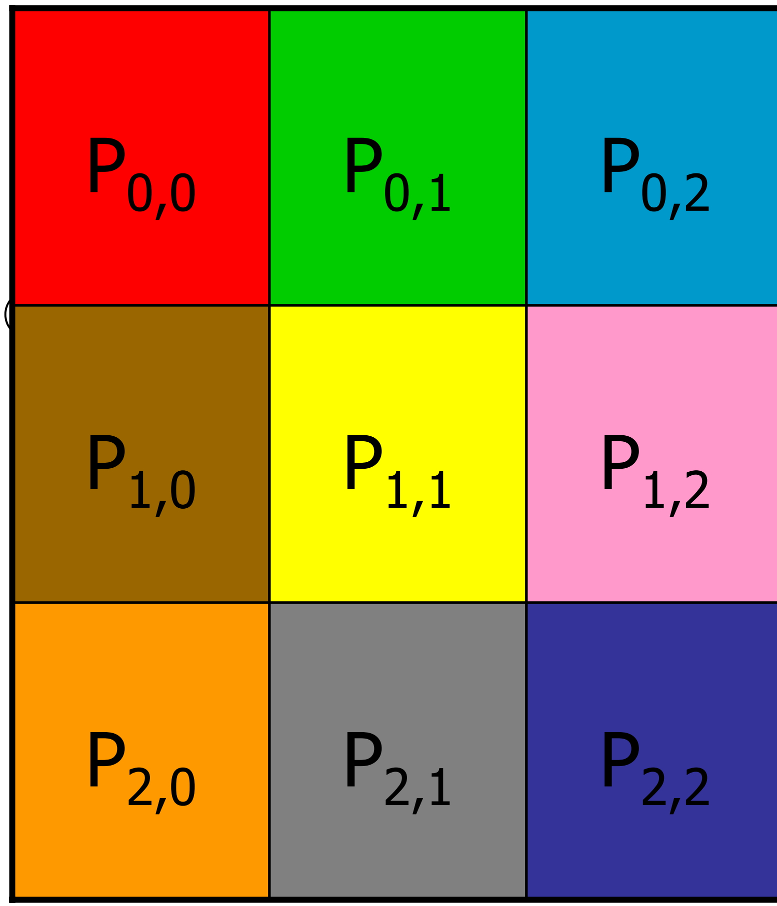
Infatti

In questo modo il workload si adatta

meglio al workflow dell'algoritmo

IV Strategia: distribuzione ciclica lungo le righe e le colonne (2D)

Consideriamo una griglia cartesiana di dimensione 3X3 periodica lungo le righe



IV Strategia

Consideriamo il sistema

$A*x = b$

con A matrice triangolare inferiore, appartenente ad R^{nXn}
e suddivisa in 6X6 blocchi $A_{i,j}$ di dimensione nb x nb

I blocchi $A_{i,j}$ in rosso sono matrici identicamente nulle

I blocchi $A_{i,i}$ in blu sono matrici Triangolari Inferiori

A =

$A_{0,0}$	$A_{0,1}$	$A_{0,2}$	$A_{0,3}$	$A_{0,4}$	$A_{0,5}$
$A_{1,0}$	$A_{1,1}$	$A_{1,2}$	$A_{1,3}$	$A_{1,4}$	$A_{1,5}$
$A_{2,0}$	$A_{2,1}$	$A_{2,2}$	$A_{2,3}$	$A_{2,4}$	$A_{2,5}$
$A_{3,0}$	$A_{3,1}$	$A_{3,2}$	$A_{3,3}$	$A_{3,4}$	$A_{3,5}$
$A_{4,0}$	$A_{4,1}$	$A_{4,2}$	$A_{4,3}$	$A_{4,4}$	$A_{4,5}$
$A_{5,0}$	$A_{5,1}$	$A_{5,2}$	$A_{5,3}$	$A_{5,4}$	$A_{5,5}$

IV Strategia

Nel sistema

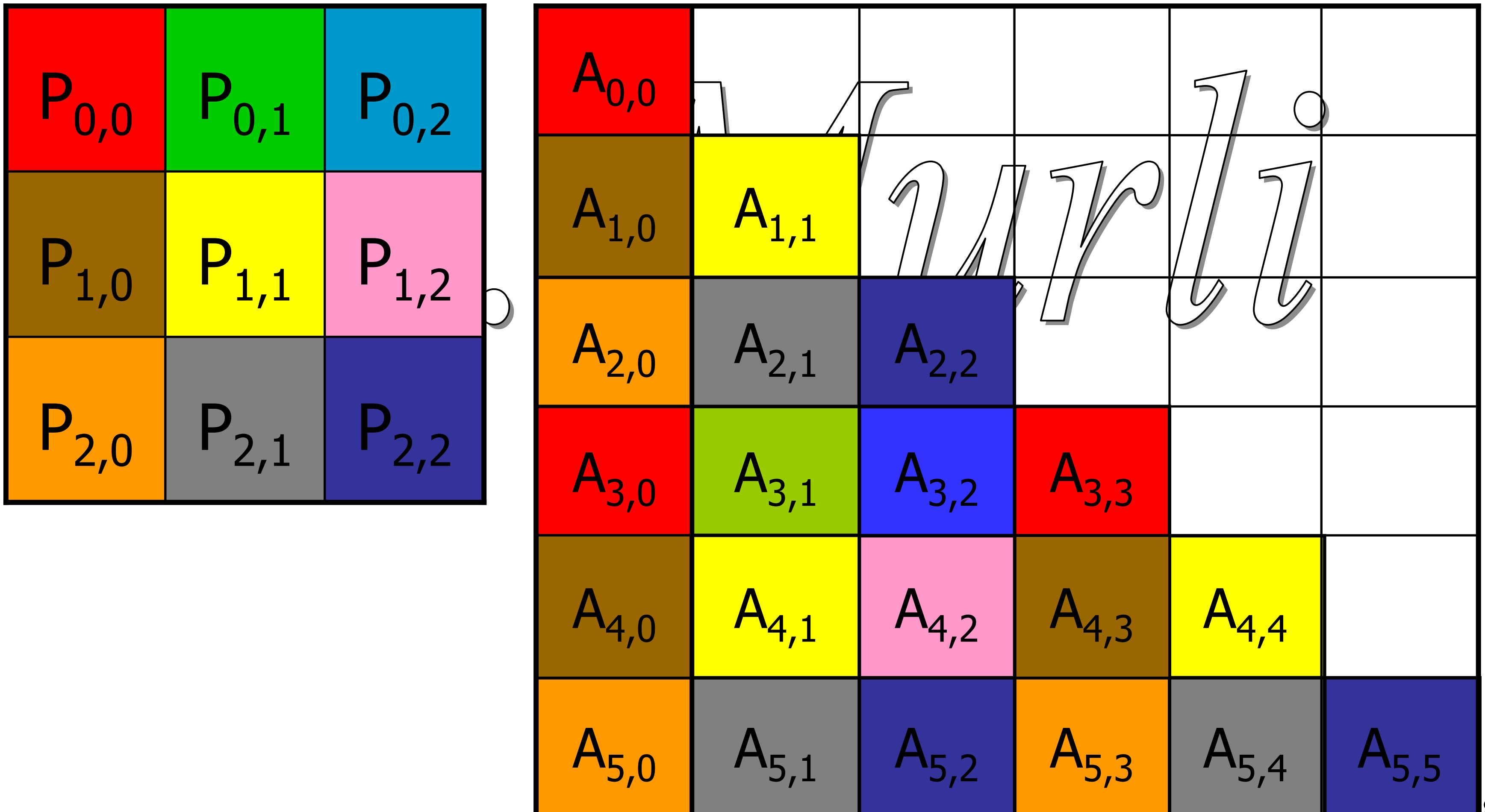
$A*x = b$

x e b sono vettori appartenenti ad R^n
e suddivisi in 6 blocchi di dimensione nb

$$X = \begin{array}{|c|}\hline X_0 \\ \hline X_1 \\ \hline X_2 \\ \hline X_3 \\ \hline X_4 \\ \hline X_5 \\ \hline \end{array} \qquad b = \begin{array}{|c|}\hline b_0 \\ \hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline b_3 \\ \hline b_4 \\ \hline b_5 \\ \hline \end{array}$$

IV Strategia: distribuzione

Distribuiamo i blocchi di A tra i processori della griglia cartesiana applicando una Distribuzione Ciclica 2D



IV Strategia:

La distribuzione Ciclica 2D è utilizzata nelle routine di ScaLapack che risolvono sistemi lineari triangolari in parallelo.

Questa scelta garantisce l’uniformità con le routine che agiscono sui dati prima/dopo la risoluzione del sistema.

Ad esempio:

Per risolvere un generico sistema lineare si possono considerare 2 Fasi:

Fase 1 - Applicare prima la fattorizzazione LU della matrice del sistema (Distribuzione ciclica 2-D)

Fase 2 - Applicare una Forward ed una Backword substitution ai sistemi ottenuti al passo precedente (Distribuzione ciclica 2-D).

In questo modo abbiamo due vantaggi:

1- I dati non devono essere ridistribuiti nel passare dalla Fase 1 alla Fase 2;

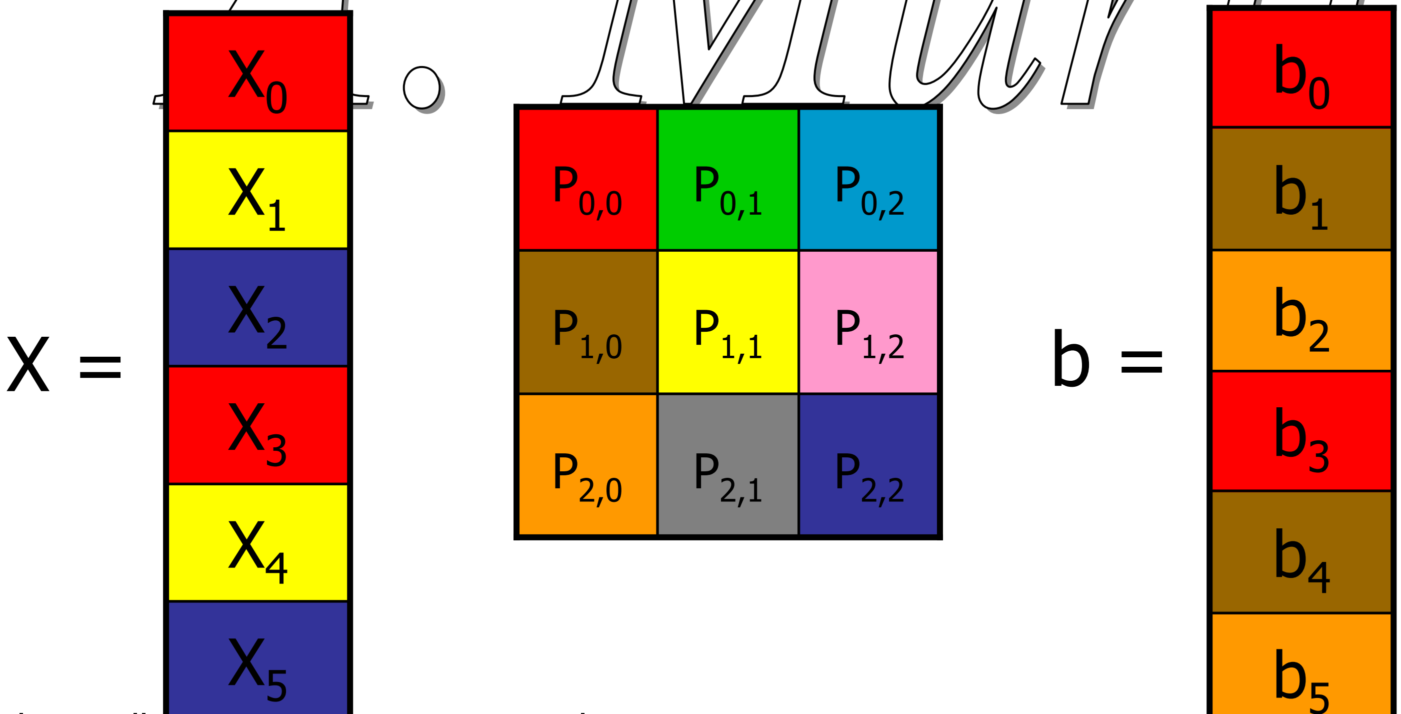
2- Nell’applicare una Backward e poi una Farward substituion il bilanciamento del carico è ottimizzato.

IV Strategia: distribuzione II

Distribuiamo i blocchi di x e di b tra i processori della griglia cartesiana

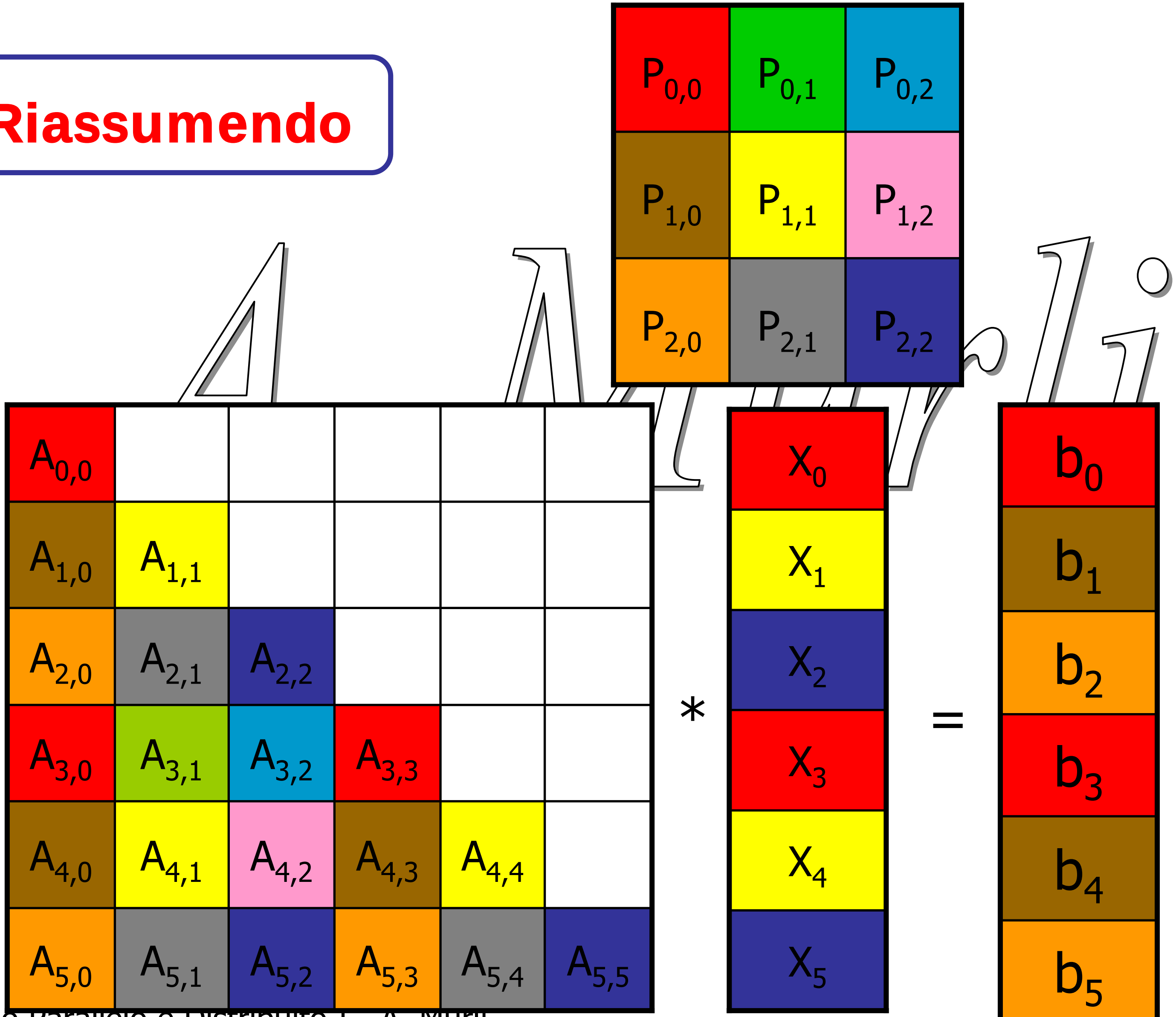
Distribuiamo ciclicamente i blocchi di X tra i processori della diagonale principale della griglia cartesiana

Distribuiamo ciclicamente i blocchi di b lungo la prima colonna della griglia cartesiana

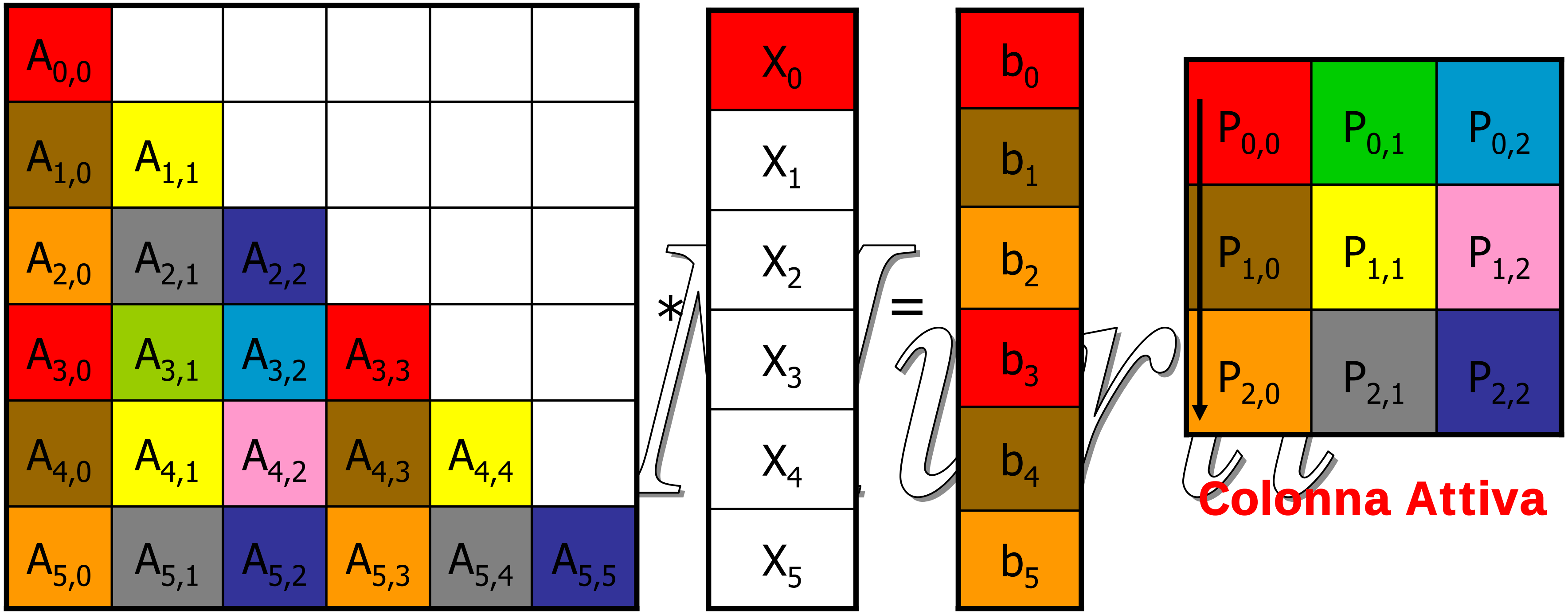


IV Strategia: distribuzione dati

Riassumendo



Passo 1 → $P_{0,0}$: calcolo + spedizione

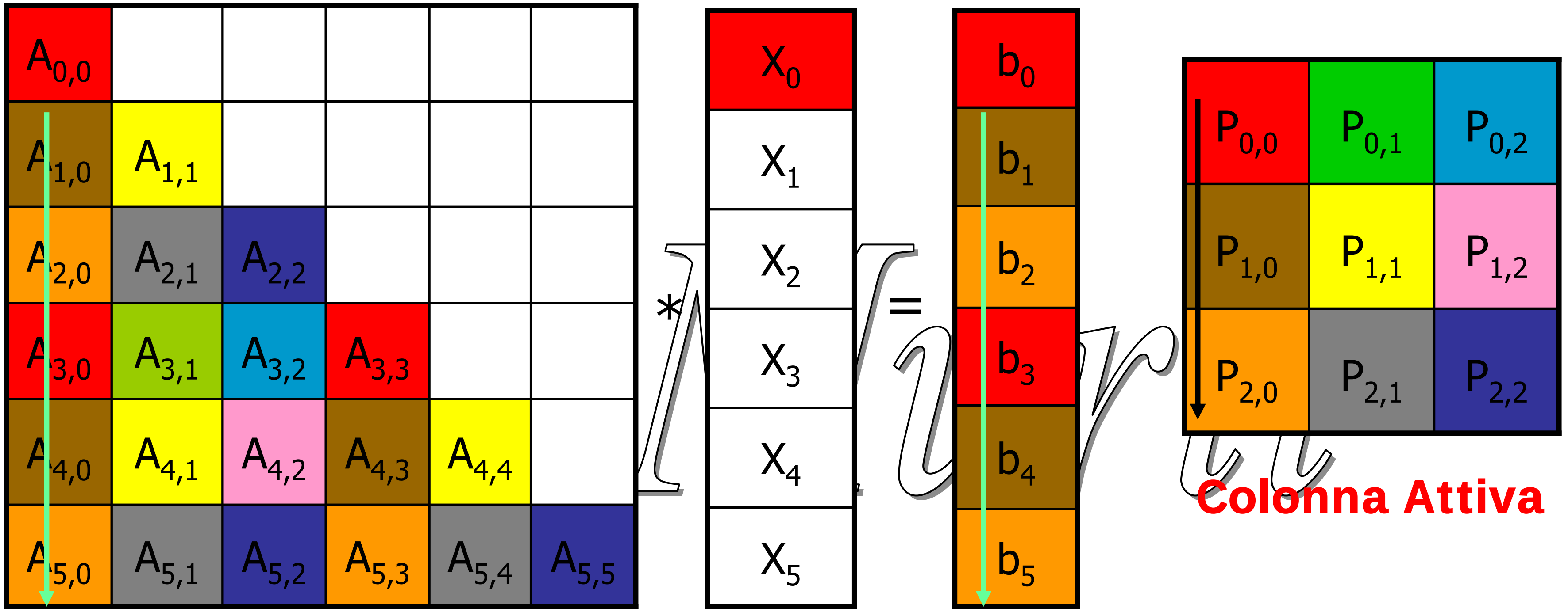


Il Processore $P_{0,0}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{0,0} * x_0 = b_0$$

Il Processore $P_{0,0}$ invia il blocco x_0 a tutti i processori $P_{i,0}$ appartenenti alla propria colonna della griglia (Colonna Attiva)

Passo 1 → $P_{i,\,0}$: aggiornamento

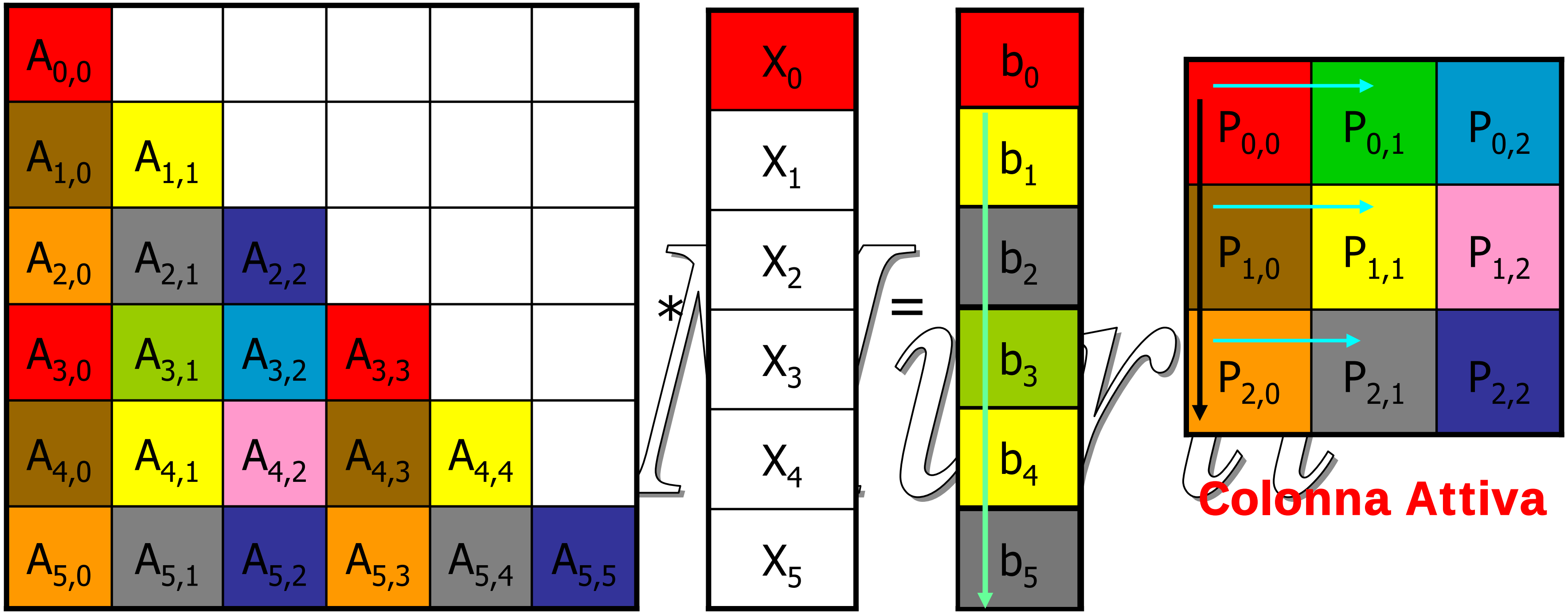


I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$ aggiornano

le componenti del vettore dei termini noti:

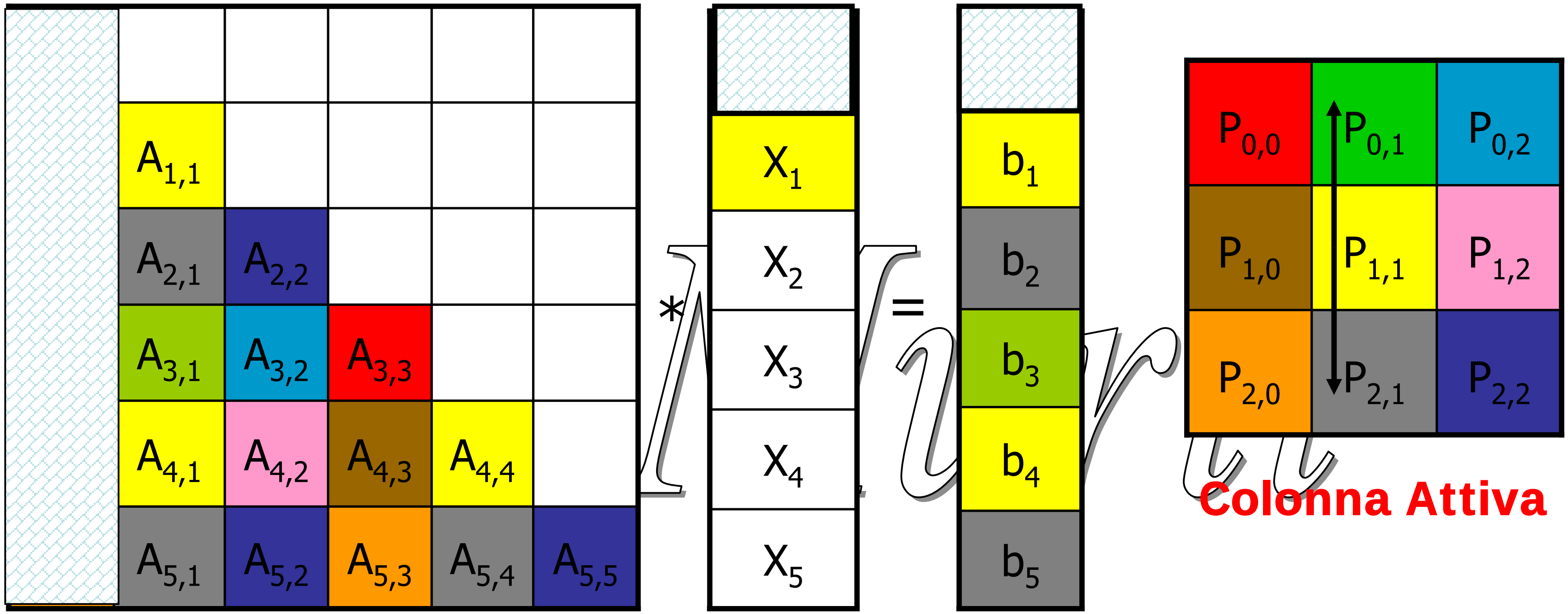
$b_j = b_j - A_{j,0} * x_0$ con $0<j<6$

Passo 1 → $P_{i,0}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$ inviano
le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
ai processori che seguono nella propria riga della griglia.

Passo 2 → $P_{1,1}$: calcolo + spedizione

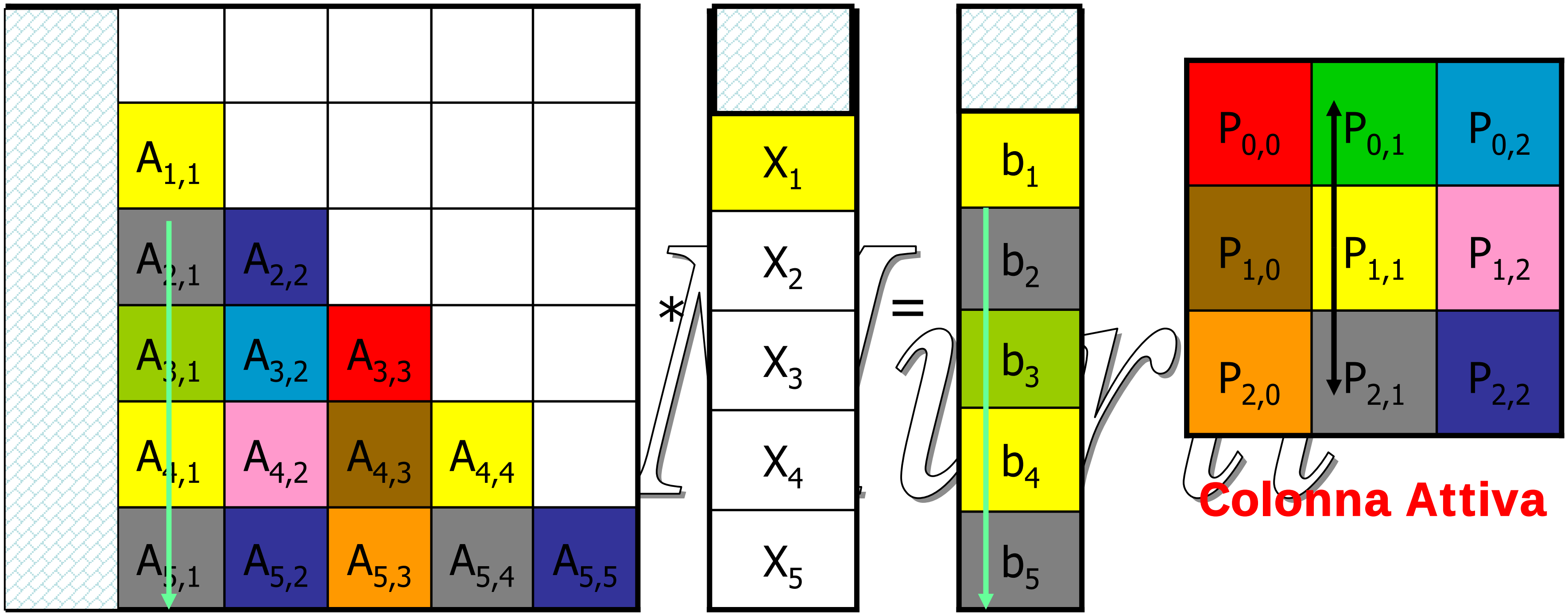


Il Processore $P_{1,1}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{1,1} * x_1 = b_1$$

Il Processore $P_{1,1}$ invia il blocco x_1 a tutti i processori $P_{i,1}$ appartenenti alla propria colonna della griglia (Colonna Attiva)

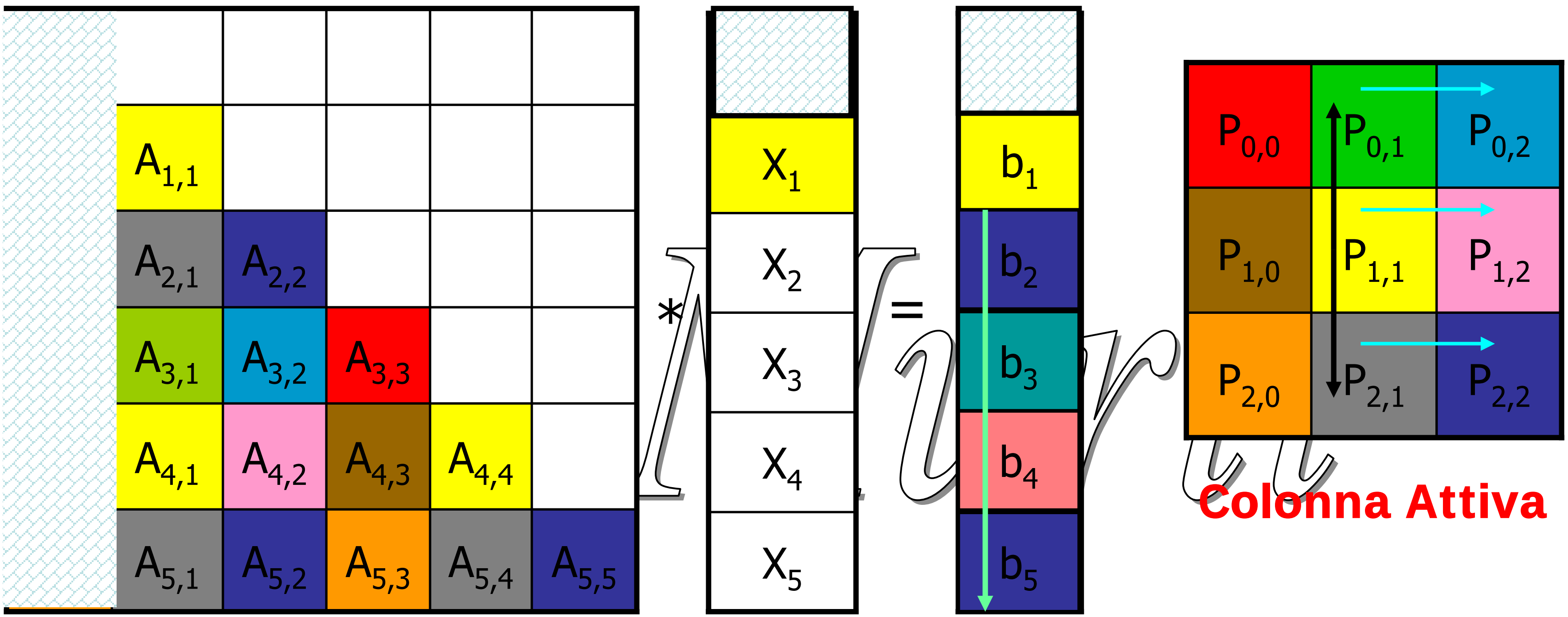
Passo 2 → $P_{i,1}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ aggiornano le componenti del vettore dei termini noti:

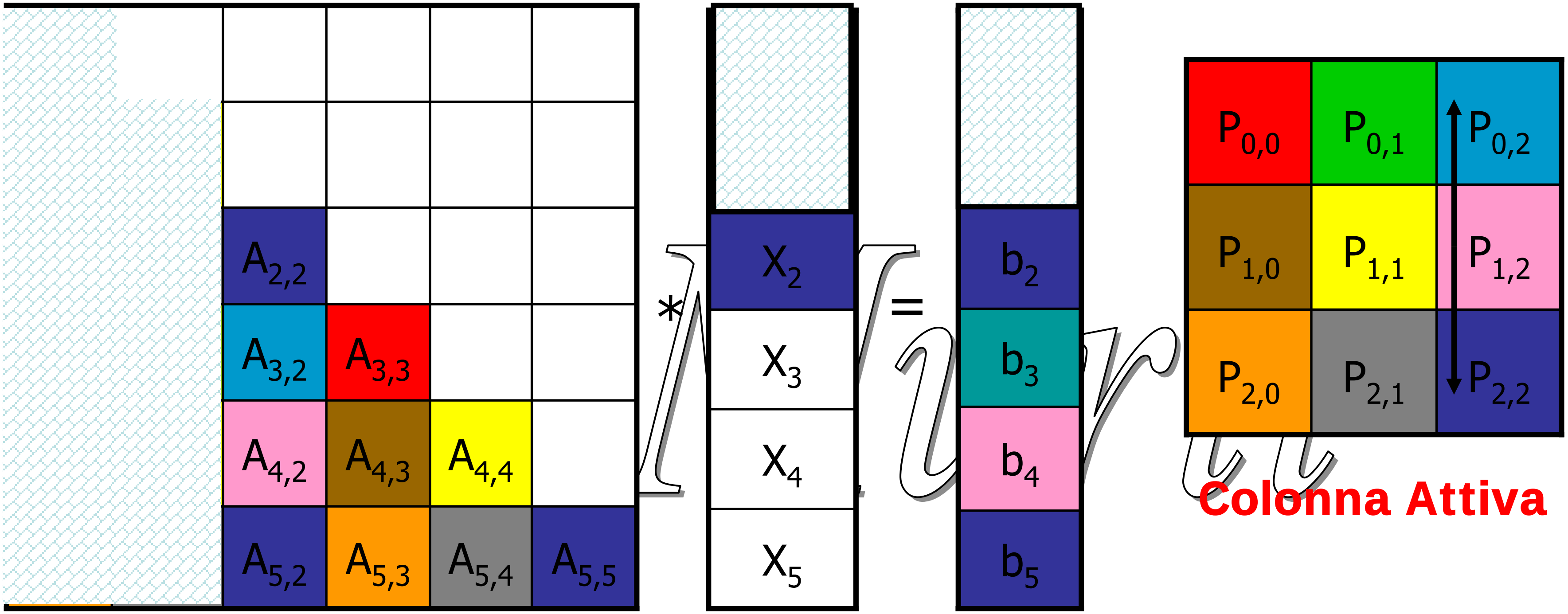
$b_j = b_j - A_{j,1} * x_1$ con $1<j<6$

Passo 2 → $P_{i,1}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ inviano
le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
ai processori che seguono nella propria riga della griglia.

Passo 3 –> $P_{2,2}$: calcolo + spedizione

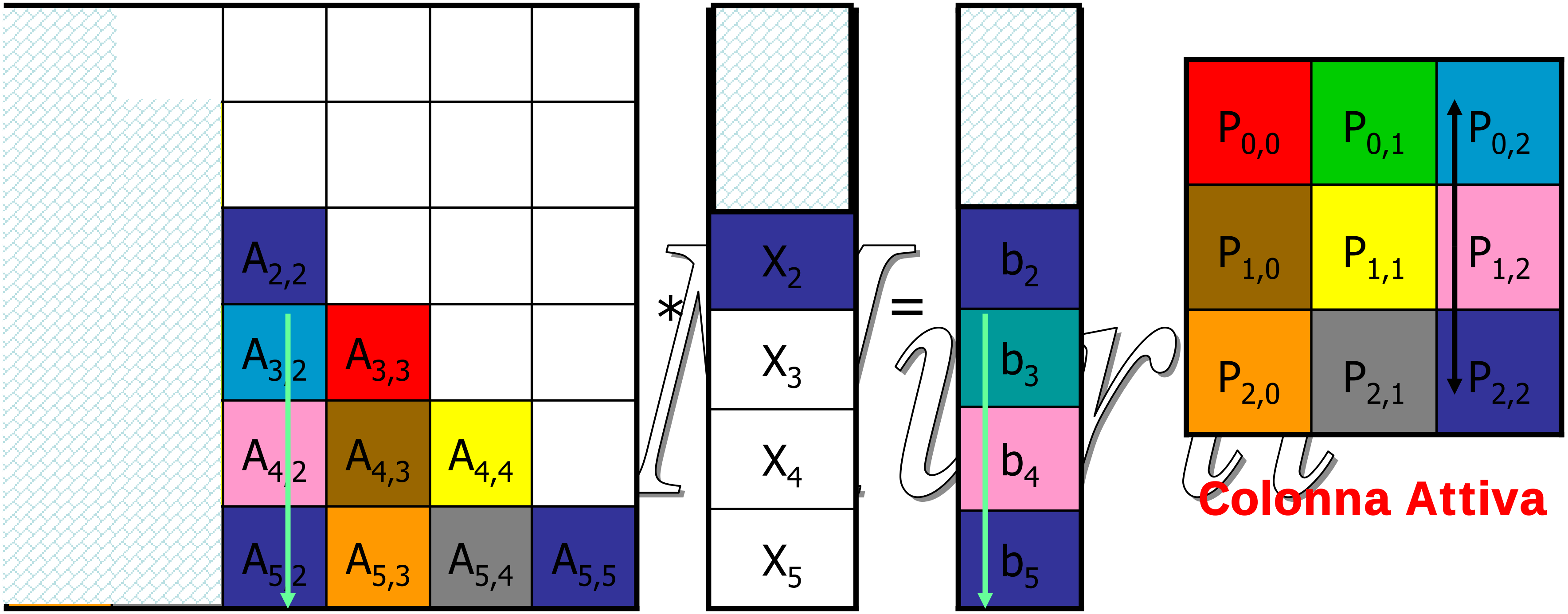


Il Processore $P_{2,2}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{2,2} * x_2 = b_2$$

Il Processore $P_{2,2}$ invia il blocco x_2 a tutti i processori $P_{i,2}$ appartenenti alla propria colonna della griglia (Colonna Attiva)

Passo 3 –> $P_{i,2}$: aggiornamento

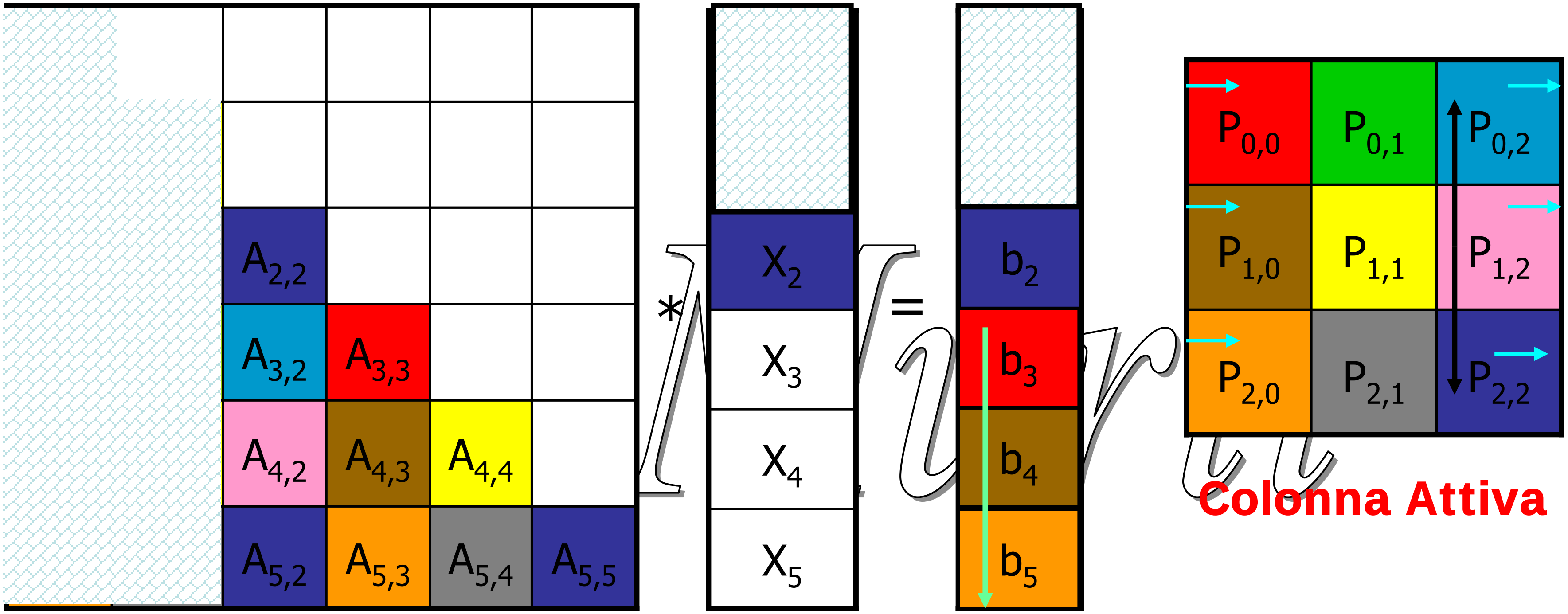


I processori della Colonna Attiva $P_{i,2}$ aggiornano

le componenti del vettore dei termini noti:

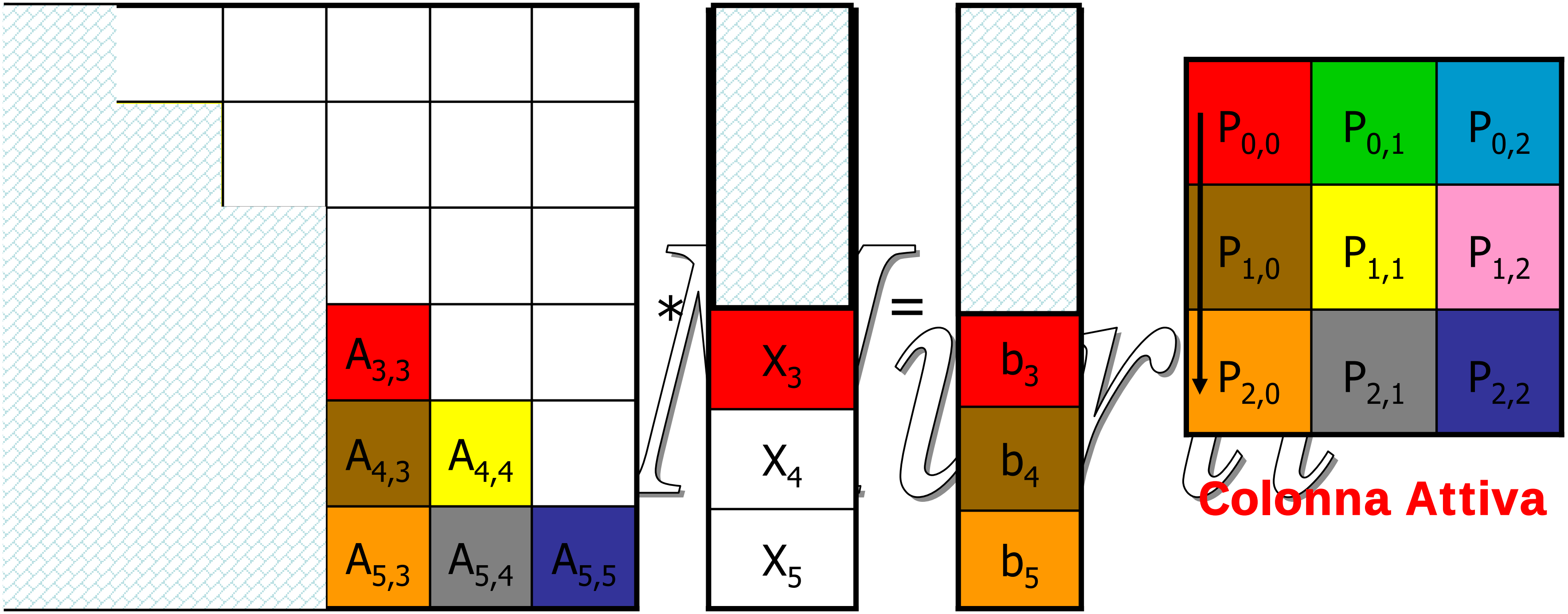
$b_j = b_j - A_{j,2} * x_2$ con $2<j<6$

Passo 3 –> $P_{i,2}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,2}$ inviano
le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
ai processori che seguono nella propria riga della griglia.

Passo 4 –> $P_{0,0}$: calcolo +spedizione

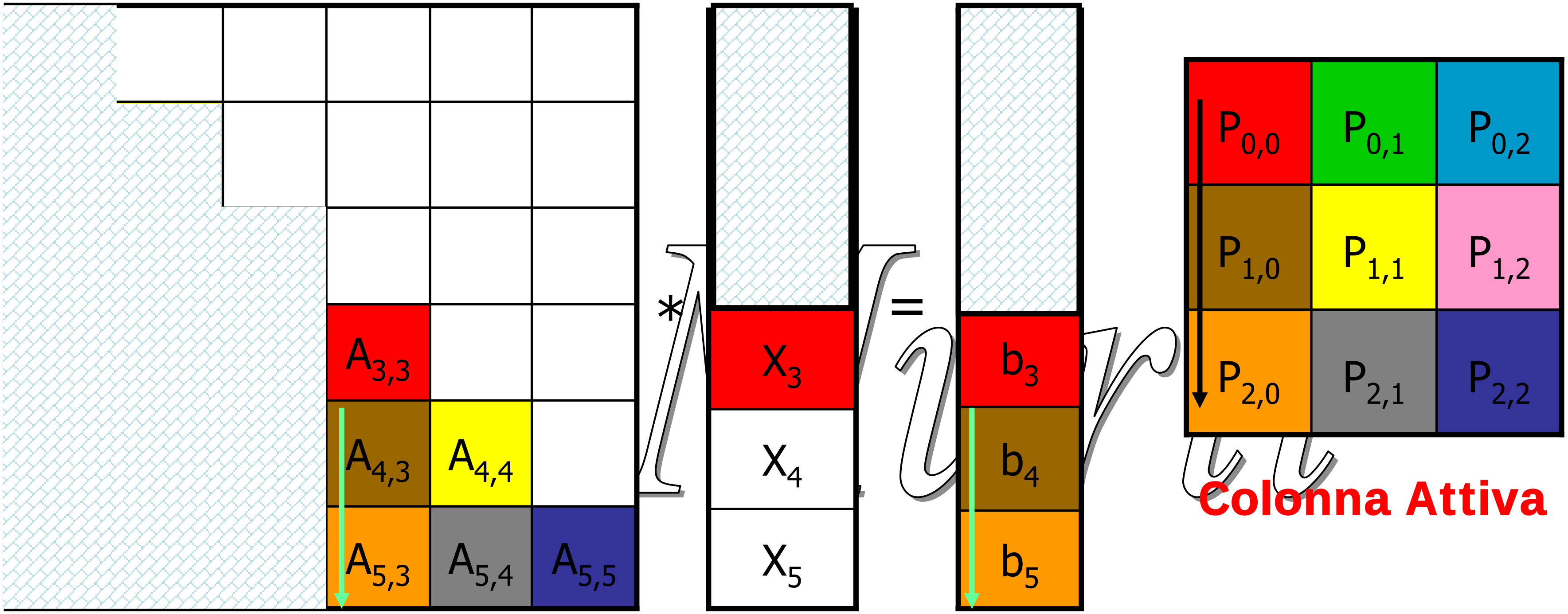


Il Processore $P_{0,0}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{3,3} * x_3 = b_3$$

Il Processore $P_{0,0}$ invia il blocco x_3 a tutti i processori $P_{i,0}$ appartenenti alla propria colonna della griglia con $i>0$

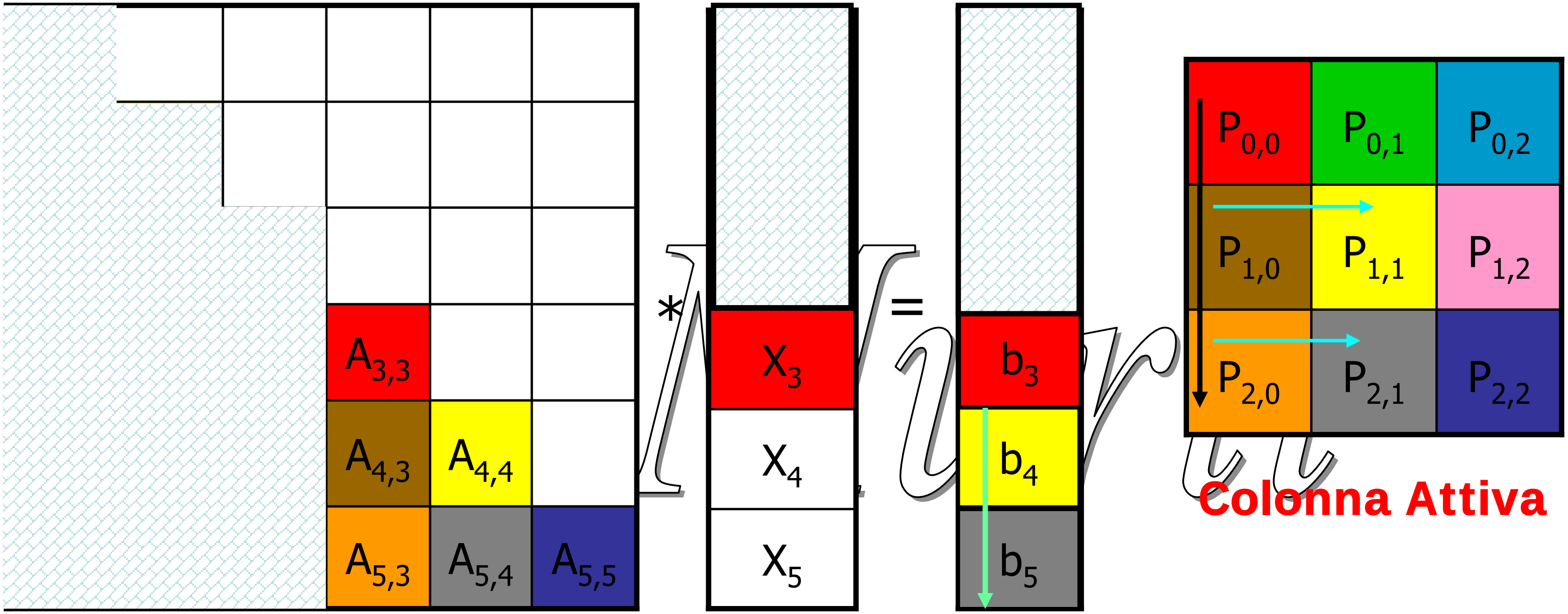
Passo 4 –> $P_{i,0}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$, $i>0$, aggiornano le componenti del vettore dei termini noti:

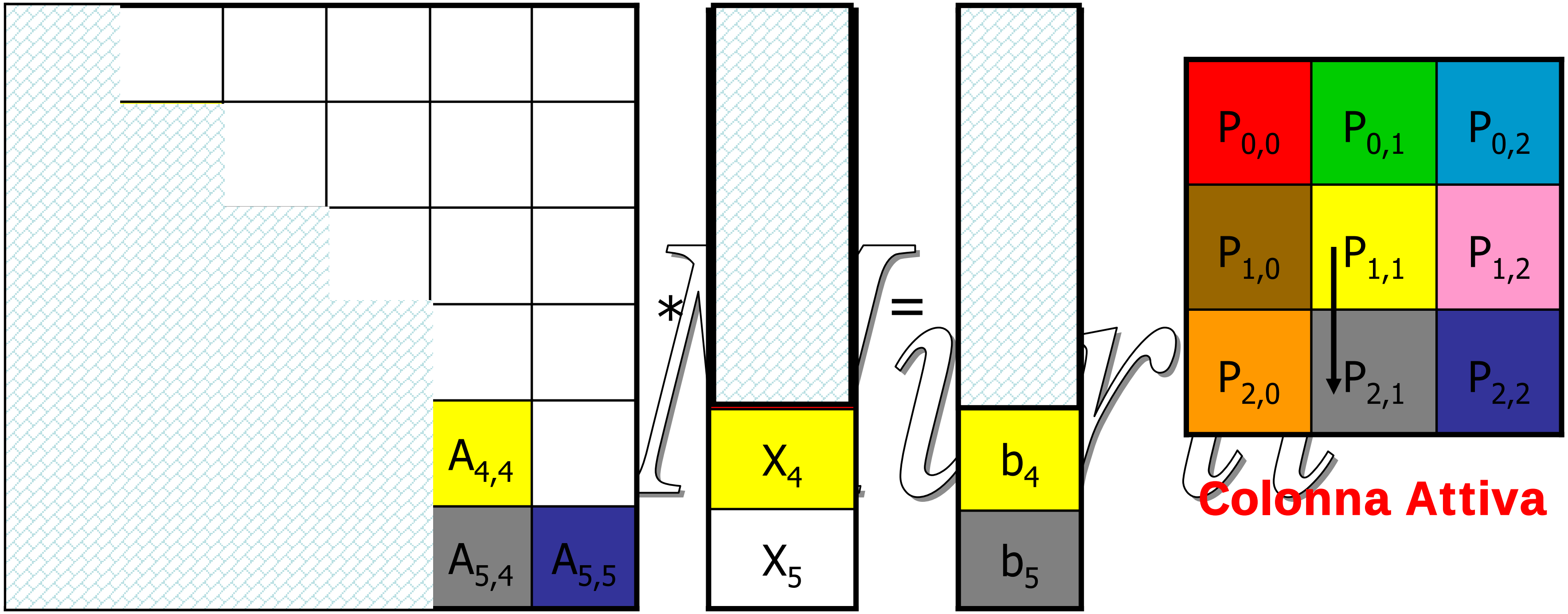
$$b_j = b_j - A_{j,3} * x_3 \text{ con } 3<j<6$$

Passo 4 –> $P_{i,0}$: spedizione



I processori della Colonna Attiva $P_{i,0}$ inviano
le componenti aggiornate del vettore dei termini noti
ai processori che seguono nella propria riga della griglia $P_{i,j}$ con $j \leq i$.

Passo 5 –> $P_{1,1}$: calcolo

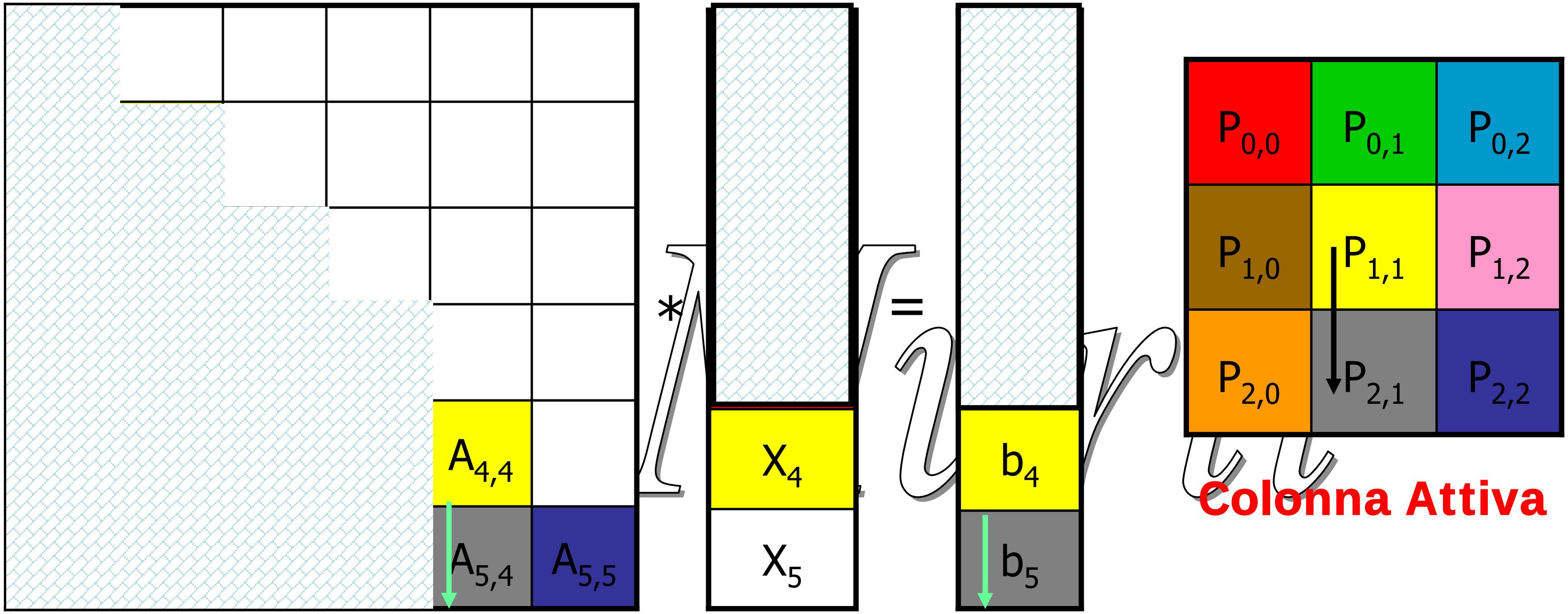


Il Processore $P_{1,1}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{4,4} * x_4 = b_4$$

Il Processore $P_{1,1}$ invia il blocco x_4 a tutti i processori $P_{i,1}$ appartenenti alla propria colonna della griglia con $i>1$

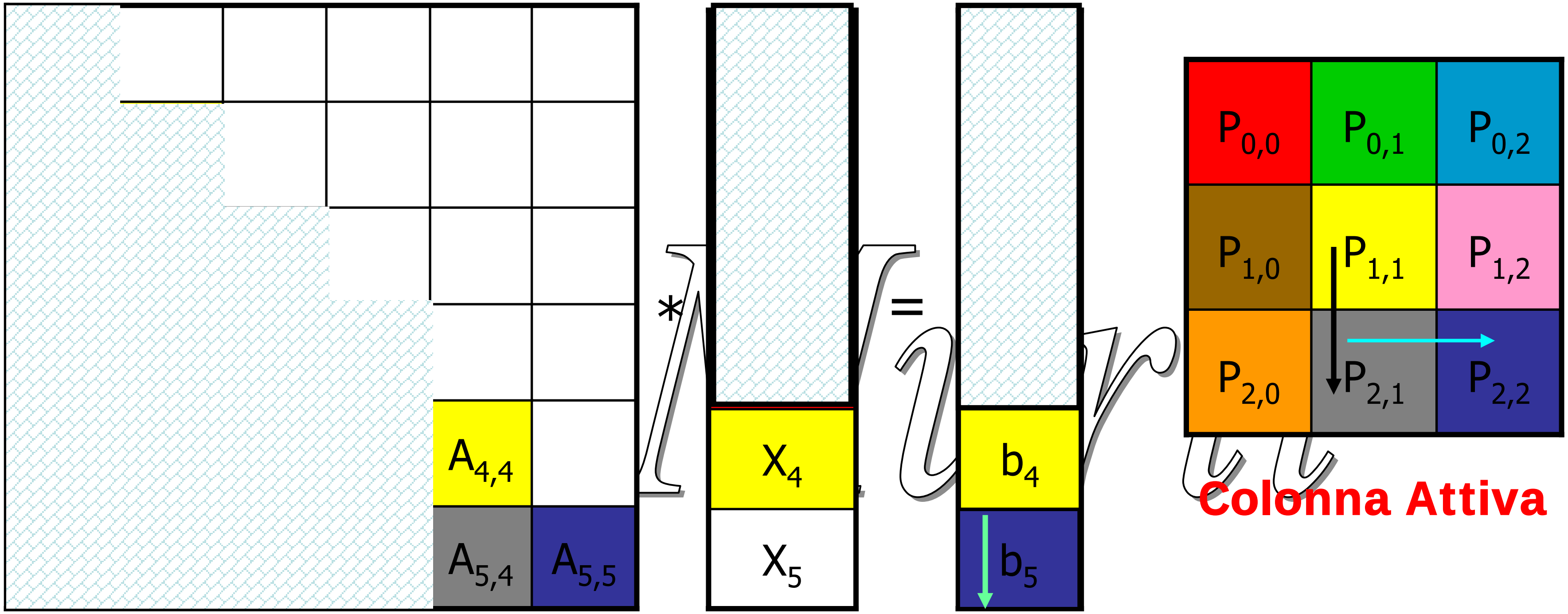
Passo 5 –> $P_{i,1}$: aggiornamento



I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ con $i>1$ aggiornano le componenti del vettore dei termini noti:

$b_j = b_j - A_{j,4} * x_4$ con $4<j<6$

Passo 5 –> $P_{i,1}$: comunicazione

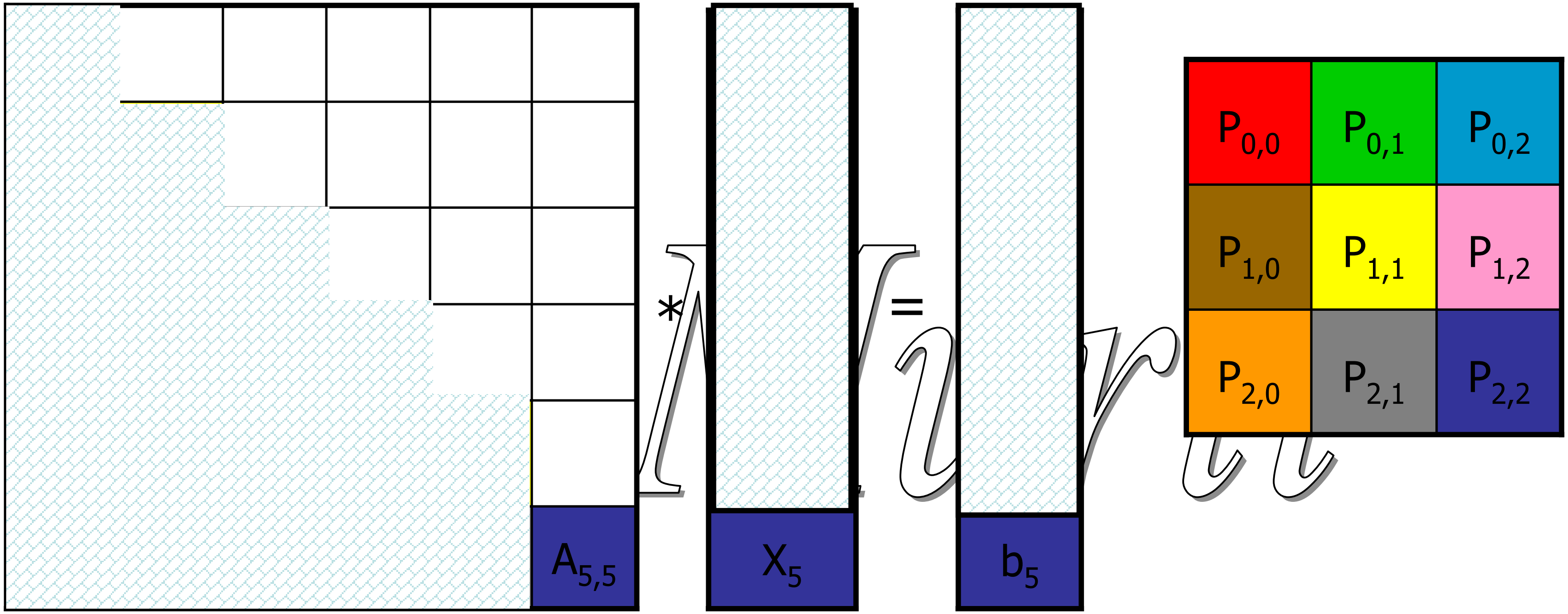


I processori della Colonna Attiva $P_{i,1}$ con $i>1$

inviano le componenti aggiornate del vettore dei termini noti

ai processori che seguono nella propria riga della griglia $P_{i,j}$ con $j \leq i$.

Passo 6 –> $P_{2,2}$: calcolo



Il Processore $P_{2,2}$ risolve il sistema triangolare inferiore:

$$A_{5,5} * x_5 = b_5$$

IV Strategia: distribuzione ciclica lungo le righe e le colonne (2D)

La soluzione è così distribuita

$P_{0,0}$ X_0, X_3	$P_{0,1}$	$P_{0,2}$
$P_{1,0}$	$P_{1,1}$ X_1, X_4	$P_{1,2}$
$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$ X_2, X_5

A. Murli

Fine esercitazione !