Esercizi di algebra lineare con `matlab`

laboratorio di **Calcolo Scientifico** *per Geofisici*
Prof. A. Murli
a.a. 2006/07

Esercitazione: operazioni tra matrici *strutturate* ed *a blocchi*

1. Sia assegnata una matrice quadrata A, di ordine $n = 2k$, a blocchi, secondo lo schema seguente:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

con $A_i \in \Re^{k \times k}$, per $i = 1, 2, 3, 4$. Siano A_{11} e A_{22} matrici piene, A_{12} triangolare inferiore e A_{21} triangolare superiore. Utilizzando **opportune funzioni `matlab`**, e ponendo particolare attenzione alla complessità di tempo e spazio, scrivere una function che:

- costruisca la matrice a blocchi, note le 4 matrici che ne costituiscono i blocchi;
- memorizzi, eventualmente, la matrice "a banda" secondo lo schema *band storage*.
  Effettuare opportune considerazioni sulla dimensione delle bande e, quindi, dei blocchi, affinché tale schema risulti particolarmente vantaggioso rispetto a quello *standard*.
- Esegua **in place**
  $$B = A^2 = A * A$$
  nei due modi seguenti:
  (a) come $A * A$;
  (b) eseguendo operazioni tra i blocchi che la costituiscono (prodotto righe per colonne e somma tra matrici).
  Qual è la complessità di tempo dell'algoritmo *più efficiente* per il calcolo di B, **che sfrutti la struttura delle sottomatrici**, nel calcolo dei singoli blocchi di B?

- Estragga da B le 4 matrici che ne costituiscono i blocchi:

$$B_{11}, \qquad B_{12}, \qquad B_{21}, \qquad B_{22}$$

Esempio: $n = 6$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 3 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$B = A^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 21 & 14 & 12 & 34 & 26 & 21 \\ 15 & 35 & 7 & 18 & 25 & -27 \\ 13 & 18 & 4 & -19 & 33 & -11 \\ \hline 15 & 32 & 28 & 49 & 21 & -12 \\ 10 & 22 & 15 & 38 & 32 & -21 \\ -21 & -10 & -9 & -15 & -12 & 0 \end{array}\right)$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 21 & 14 & 12 \\ 15 & 35 & 7 \\ 13 & 18 & 4 \end{pmatrix} \qquad B_{12} = \begin{pmatrix} 34 & 26 & 21 \\ 18 & 25 & -27 \\ -19 & 33 & -11 \end{pmatrix}$$

$$B_{21} = \begin{pmatrix} 15 & 32 & 28 \\ 10 & 22 & 15 \\ -21 & -10 & -9 \end{pmatrix} \qquad B_{22} = \begin{pmatrix} 49 & 21 & -12 \\ 38 & 32 & -21 \\ -15 & -12 & 0 \end{pmatrix}$$