Esercizi sull'utilizzo delle funzioni `fft` e `ifft` di `matlab`

laboratorio di **Calcolo Scientifico** *per Geofisici*

Prof. A. Murli

a.a. 2006/07

Utilizzando le funzioni `fft` e `ifft` di `matlab`, scrivere delle routines che risolvano i seguenti problemi:

1. assegnato un vettore x di dimensione n, calcolare la FFT di x (verificare la correttezza dei calcoli eseguendo una IFFT del risultato ottenuto).

2. Verificare che l'operatore DFT è **lineare**, ovvero verificare che, se f, g $\in \mathbb{C}^N$ sono vettori di numeri complessi di lunghezza N, e se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si ha:
$$DFT[\alpha f + \beta g] = \alpha DFT[f] + \beta DFT[g]$$
Si assegnino, ad esempio, i due vettori complessi:
$$f = (1+i, -3, 5+7i, -2), \quad g = (3+4i, 4, 7, 1-i)$$
e gli scalari $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

3. Verificare che, se $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ è un vettore di numeri complessi di lunghezza N e se
$$f_{sim} = (f_0, f_{N-1}, f_{N-2}, ..., f_1)$$
è il suo vettore **simmetrico**, si ha:
$$\frac{1}{N} DFT[DFT[f]] = f_{sim}.$$
Si assegni, ad esempio, $f = (1+i, -3, 5+7i, -2)$.

4. Verificare le seguenti proprietà dell'operatore DFT:
   (a) Se $f \in \mathbb{R}^N$ è un **vettore di numeri reali**, allora $F = DFT[f]$ è un vettore hermitiano simmetrico, ovvero:
   $$F_k = \bar{F}_{N-k} \quad k = 1, ..., N/2$$
   avendo indicato con $\bar{F}_{N-k}$ il numero complesso coniugato di F_{N-k}.
   (b) Se $f \in \mathbb{C}^N$ è un vettore hermitiano simmetrico, ovvero $f_k = \bar{f}_{N-k}$, allora $F = DFT[f]$ è un vettore di numeri reali.

(c) Se g è un **vettore le cui componenti sono numeri immaginari** allora $G = DFT[g]$ è un vettore hermitiano antisimmetrico, ovvero:

$$G_k = -\bar{G}_{N-k} \quad k = 1, ..., N/2$$

(d) Se g è un vettore hermitiano antisimmetrico, ovvero $g_k = \bar{g}_{N-k}$, allora $G = DFT[g]$ è un vettore le cui componenti sono numeri immaginari.

Si assegni, ad esempio, $f = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ e $g = (i, -2i, 5i, -4i, 3i, 6i)$. Si calcolino $DFT[f]$ e $DFT[g]$ e si effettuino opportune considerazioni sui risultati.

5. Sia data la seguente:

Definizione 1.1. (Prodotto di convoluzione)
Dati due vettori $a = (a_0, a_1, ..., a_{N-1})$ e $b = (b_0, b_1, ..., b_{N-1})$ si definisce **prodotto di convoluzione** *il vettore:*

$$c = a * b$$

la cui $j-$esima componente è data da:

$$c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k \cdot b_{j-k} \quad j = 0, ..., N-1$$

Vale il seguente:

Teorema 1.1 (di convoluzione). *Siano $F = DFT[f]$ e $G = DFT[g]$ le DFT di due vettori f e g di lunghezza N. La DFT del prodotto di convoluzione $f * g$ è il prodotto componente per componente dei vettori F e G, ovvero:*

$$DFT[f * g] = (F_0G_0, F_1G_1, ..., F_{N-1}G_{N-1}) = F. * G$$

avendo indicato con $.*$ il prodotto puntuale dei vettori F e G.

Verificare il risultato enunciato dal teorema, attraverso le seguenti **applicazioni della DFT**:

(a) **Moltiplicazione di due polinomi**. Siano assegnati due polinomi:

$$p(x) = 1 + 5x + 17x^2, \qquad q(x) = 11 + 6x - 4x^2$$

Definiti i due vettori:

$$a = (1, 5, 17, 0, 0) \quad \text{e} \quad b = (11, 6, -4, 0, 0)$$

che contengono i coefficienti di p e q rispettivamente; i coefficienti del polinomio z di quarto grado prodotto di p e di q si ottengono effettuando il prodotto di convoluzione dei vettori a e b, ovvero:

$$c = a * b = (11, 61, 213, 82, -68, 0, 0, 0, 0)$$

Il polinomio prodotto z è, infatti:

$$z(x) = p(x)q(x) = 11 + 61x + 213x^2 + 82x^3 - 68x^4$$

Per determinare i coefficienti di z utilizziamo l'operatore DFT. Posto:

$$\begin{aligned}
&A = DFT[a] = \\
&= (23, -11.2082 + 14.7476i, 2.082 - 13.229i, 2.2082 + 13.229i, -11.2082 - 14.7476i) \\
&B = DFT[b] = \\
&= (13, 16.0902 + 3.3552i, 4.9098 + 7.3309i, 4.9098 - 7.3309i, 16.0902 - 3.3552i)
\end{aligned}$$

utilizzando il **Teorema 1.1**, verificare che il vettore ottenuto come prodotto di convoluzione $a * b$, calcolabile attraverso la funzione `conv` di `matlab` applicata ad a e b:

$$\texttt{conv}(\texttt{a}, \texttt{b})$$

coincide con

$$\texttt{ifft}(\texttt{A}.*\texttt{B}) = \texttt{ifft}(\texttt{fft}(\texttt{a}).*\texttt{fft}(\texttt{b}))$$

con

$$\texttt{A} = \texttt{fft}(\texttt{a}) \qquad e \qquad \texttt{B} = \texttt{fft}(\texttt{b})$$

Quante DFT occorre calcolare per realizzare il calcolo dei coefficienti del prodotto di due polinomi?

(b) **Prodotto matrice circolante per vettore**
Consideriamo la matrice circolante[1] C generata dal vettore $v = (5, 2, 7, 9, 4)$:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 & 9 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 9 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 7 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 9 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

si vuole utilizzare la DFT per il calcolo del prodotto matrice per vettore[2]

$$C \cdot x' = y'$$

---

[1]

Definizione 1.2. (Matrice Circolante) *Assegnato un vettore $v = (v_0, v_1, ..., v_{N-1})$ si definisce* **matrice circolante** *di lunghezza N, generata dal vettore v, una matrice $C := C(v)$*

$$C := C(v) = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{N-2} & v_{N-1} \\ v_{N-1} & v_0 & \cdots & v_{N-3} & v_{N-2} \\ v_{N-2} & v_{N-1} & \cdots & v_{N-4} & v_{N-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{N-1} & v_0 \end{bmatrix}.$$

[2]

Sia $x = (1, 2, 3, 4, 5)$, si ha $y = (86, 93, 75, 67, 84)$.

Poiché

$$Cx' = y' \quad \Leftrightarrow \quad W^{-1}DWx' = y' \quad \Leftrightarrow \quad DWx' = Wy'$$

e

$$Wx' = DFT[x'], \quad Wy' = DFT[y'],$$

posto $X' = DFT[x']$, $Y' = DFT[y']$, $D = diag(F)$ e $F = DFT[c]$, **con c prima colonna della matrice C, ovvero** v_{sim}, si ha

$$Cx' = y' \quad \Leftrightarrow \quad F. * X' = Y'$$

avendo indicato con $.*$ il prodotto puntuale dei vettori F e X'.
Verificare che

$$\texttt{fft(c)}. * \texttt{fft(x)} = \texttt{fft(y)}$$

ovvero che attraverso il calcolo di 3 DFT si perviene al vettore soluzione y:

$$\texttt{y} = \texttt{ifft(fft(c)}. * \texttt{fft(x))}$$

Assumendo che il calcolo della DFT di un vettore sia realizzato mediante l'algoritmo di Cooley e Tukey, confrontare la complessità di tempo richiesta dal calcolo delle 3 DFT con quella del prodotto matrice vettore eseguito righe per colonne.

Teorema 1.2. *Sia $C := C(v)$ una matrice circolante di lunghezza N generata dal vettore v ed $F = DFT[c]$,* **con c prima colonna di C, ovvero** *v_{sim}, allora vale:*

$$C = W^{-1}DW$$

essendo W la matrice di Fourier di dimensione N e $D = diag(F)$ una matrice diagonale con elementi diagonali costituiti dalle componenti di F.