Esercizi di riepilogo sull'utilizzo di funzioni `matlab` per l'algebra lineare

laboratorio di **Calcolo Scientifico** *per Geofisici*

Prof. A. Murli

a.a. 2006/07

Utilizzando funzioni *built-in* del `matlab` o function definite opportunamente dall'utente, risolvere i seguenti esercizi:

1. realizzare il prodotto *scalare* di due vettori di dimensione n;
2. realizzare il prodotto *puntuale* di due vettori di dimensione n; stampare i risultati in singola e doppia precisione [1];
3. copia di un vettore x in un vettore y;
4. copia delle componenti di indice pari di un vettore x in un vettore y;
5. **norma due** e **norma infinito** di un vettore x [2];
6. massimo di un vettore;
7. **norma uno** e **norma infinito** di una matrice A [3];
8. massimo di una matrice.
9. costruzione di una matrice i cui elementi siano il massimo degli elementi che occupano la stessa posizione in due matrici, A e B, non necessariamente quadrate.

---

[1] Utilizzare `format` per controllare e cambiare il formato dei valori numerici di output.

[2] Alcune tra le più note ed utilizzate norme vettoriali sono:

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$	**norma 1 o norma del valore assoluto**
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2}$	**norma 2 o norma Euclidea**
$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \|x_i\|$	**norma ∞ o norma del massimo**

[3] Alcune tra le più note ed utilizzate norme matriciali sono:

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|$	**norma 1**
$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|$	**norma ∞**

10. calcolare l'inversa di una matrice quadrata A di dimensione n;

Costruire function `matlab` che realizzino, *con il minor costo computazionale possibile*, in termini di complessità **di tempo** e **di spazio**, le seguenti operazioni:

1. prodotto righe per colonne di una matrice per un vettore;
2. prodotto righe per colonne di una matrice simmetrica per un vettore;
3. prodotto righe per colonne di una matrice triangolare superiore (inferiore) per un vettore;
4. prodotto *puntuale* di due matrici;
5. prodotto *righe per colonne* di due matrici di dimensioni rispettivamente $m \times n$ e $n \times k$;
6. assegnate due matrici, verificare quale delle due è simmetrica ed eseguirne il prodotto righe per colonne;
7. assegnate due matrici *a banda* eseguirne il prodotto righe per colonne;
8. *utilizzando* la funzione `det` di `matlab`, calcolare il determinante di una matrice quadrata A di dimensione n;
9. *senza* utilizzare la funzione `det` di `matlab`, calcolare il determinante di una matrice quadrata A di dimensione n, *triangolare (superiore o inferiore)*. Confrontare i risultati forniti dalla funzione `det` di `matlab`.
10. *senza* utilizzare la funzione `det` di `matlab`, calcolare il determinante di una matrice A piena, non strutturata, quadrata, di dimensione n. Confrontare i risultati forniti dalla funzione `det` di `matlab`.

Utilizzando function `matlab` già realizzate, costruire *routine driver* che risolvano, *con il minor costo computazionale possibile*, in termini di complessità **di tempo** e **di spazio**, i problemi seguenti[4]:

1. assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, effettuare la fattorizzazione LU di A;
2. assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, ed un vettore b, di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

[4]Risolvere gli esercizi senza ricorrere al `backslash` \, utilizzando quest'ultimo solo per una verifica dei risultati.

3. Risolvere più sistemi di equazioni lineari, aventi la stessa matrice dei coefficienti. Porre particolare attenzione alla complessità di tempo dell'algoritmo implementato.

4. Assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, *triangolare* (superiore o inferiore), ed un vettore b, di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

5. Assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, *tridiagonale*, ed un vettore b, di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

6. Assegnata una matrice quadrata A a banda di dimensione n, con ampiezza di banda pari a $w = p + q + 1$, effettuare la fattorizzazione LU di A.

7. Assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, *a banda*, con ampiezza di banda inferiore p e superiore q, ed un vettore b, di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

8. Assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, *simmetrica*, *a diagonale dominante*, ed un vettore b, di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

9. Assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, *simmetrica*, *definita positiva*, ed un vettore b, di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

10. Assegnata una matrice quadrata A di dimensione n, verificare se è simmetrica; in tal caso verificare se è a diagonale dominante; in tal caso verificare se è definita positiva. In base alla struttura della matrice, richiamare la function che implementi l'algoritmo *più efficiente* per la risoluzione del sistema lineare che ammette A come matrice dei coefficienti. Al fine di ridurre la complessità di spazio richiesta dall'algoritmo implementato, utilizzare un *opportuno* schema di memorizzazione per A.

11. Assegnata una matrice quadrata A tridiagonale a blocchi di dimensione $n = m \times n_b$, dove m è la dimensione di ogni singolo blocco e n_b è il numero di blocchi[5], ed un vettore b di dimensione n, risolvere il sistema $Ax = b$.

[5]Si consiglia di sviluppare l'esercizio, considerando il numero dei blocchi n_b e la dimensione di ciascun blocco, come dati di input.