Esercizi sul condizionamento con `matlab`

laboratorio di **Calcolo Scientifico** *per Geofisici*

Prof. A. Murli

a.a. 2006/07

1. **Calcolo dell'indice di condizionamento di una matrice**

   - Determinare una function in `matlab` che, assegnate in input una matrice $X \in \Re^{n\times n}$ e la sua inversa, X^{-1}, esegua il calcolo dell'indice di condizionamento in **norma** 1.
   - Realizzare un'ulteriore function che, assegnate in input una matrice $X \in \Re^{n\times n}$ e la sua inversa, X^{-1}, esegua il calcolo dell'indice di condizionamento in **norma** ∞ [1].
   - Sviluppare un elemento di software matematico che, data $X \in \Re^{n\times n}$,
     - esegua il calcolo dell'inversa, X^{-1} (utilizzando una opportuna funzione di `matlab` o, facoltativamente, una function sviluppata in laboratorio, che si basi sulla fattorizzazione LU)
     - chiami la function per il calcolo dell'indice di condizionamento $\mu(X)$ in una norma a scelta.
   - Osservazioni sulla **complessità di tempo** richiesta dagli algoritmi implementati.
   - Confrontare i risultati restituiti dagli elementi di software implementati e dalla funzione di `matlab` `cond(X,p)` che calcola l'indice di condizionamento, in norma p, con $p = 1$, o $p =$ `inf`, della matrice X.

2. Assegnata la matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.2648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix},$$

   di un sistema lineare $Ax = b$, si supponga che gli elementi di A non siano affetti da errore ($\Delta A = 0$) e che il vettore dei termini noti sia perturbato

---

[1] Si ricorda che, per una matrice $A \in \Re^{m\times n}$,

$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ **norma 1**

$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ **norma ∞**

commettendo, nella sua approssimazione, un errore relativo

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \simeq 10^{-3}. \tag{1}$$

– Calcolare, utilizzando una funzione *built-in* di `matlab` o un elemento di software matematico sviluppato in laboratorio, l'indice di condizionamento di A, $\mu(A)$, in norma 1 o norma ∞.
– Stimare, in un sistema aritmetico a precisione finita,

$$F = (\beta = 10, t = 4, emin = -5, emax = 5),$$

il numero di cifre significative corrette nell'approssimazione della soluzione del sistema, esprimendo l'errore relativo:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

in funzione di $\mu(A)$, rappresentato in notazione floating point normalizzata, e della (1).

3. Sia assegnata la seguente matrice quadrata U *triangolare superiore*:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) sfruttando un'opportuna function `matlab`, calcolare l'inversa U^{-1}di U e scrivere il risultato.

(b) Stimare la complessità computazionale per il calcolo dell'inversa di una matrice quadrata, di dimensione n, *triangolare superiore*, descrivendo brevemente il metodo alla base dell'algoritmo **che risulti più efficiente, per la risoluzione del problema in esame, in relazione alla particolare struttura della matrice**. **Porre particolare attenzione alla complessità di spazio richesta dalla memorizzazione della matrice U secondo un opportuno schema di memorizzazione che ne sfrutti la struttura**.

(c) Calcolare, specificando se si realizza il calcolo **mediante una funzione *built-in* di `matlab` o un elemento di software sviluppato in laboratorio**, l'indice di condizionamento di U, secondo la formula $\mu_\infty(U) = \|U\|_\infty \cdot \|U^{-1}\|_\infty$.

(d) Si consideri un sistema di equazioni lineari avente la matrice U come matrice dei coefficienti; supponendo che il vettore dei termini noti, b, sia perturbato e che la sua approssimazione sia corretta a p cifre significative, ovvero

$$\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \simeq 10^{1-p} \tag{2}$$

supponendo, inoltre, che i coefficienti della matrice U non siano affetti da errore ($\Rightarrow \triangle U = 0$),

i. rappresentare $\mu_\infty(U)$ in notazione floating point normalizzata, in un sistema f. p. a precisione finita, caratterizzato dai seguenti parametri:

$$F = (\beta = 10, t = 4, emin = -4, emax = 4)$$

ed esprimere l'errore relativo

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$$

in funzione di $\mu_\infty(U)$ e della (2), stimando il numero di cifre significative corrette nell'approssimazione della soluzione del sistema.

ii. Nel sistema aritmetico a precisione finita

$$F = (\beta = 10, t = 4, emin = -4, emax = 4),$$

la matrice U è mal condizionata? Giustificare la risposta ponendo particolare attenzione al numero di cifre significative perse, nella risoluzione del sistema ed al massimo numero di cifre significative corrette nella rappresentazione dei dati in F.

4. Calcolare per quali valori di x il problema della valutazione della funzione

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} \quad \text{per} \quad x \neq 0 \quad \text{e} \quad x > -1$$

risulta ben condizionato, stimando, in particolare, l'indice di condizionamento *relativo* per la funzione f.

5. Si consideri il sistema aritmetico f. p. a precisione finita:

$$\Im : \quad \beta = 10, \quad t = 5, \quad e_{min} = -9 \quad e_{max} = 9.$$

- Qual è l'indice di condizionamento relativo del problema rappresentato dalla funzione

$$f \ : \ \Re \times \Re \ \rightarrow \Re$$

che alla coppia di numeri reali (x, y) associa il numero reale $z = x - y$?

- Si supponga che

$$x = 0.3, \qquad y = 0.29999.$$

Stimare il valore numerico dell'indice di condizionamento relativo del problema della sottrazione tra i numeri x e y.

- Eseguendo la sottrazione tra i due numeri assegnati, nel sistema aritmetico a precisione finita $\Im$, quante cifre significative si perdono?

6. **Esercizio di riepilogo**
   Sfruttando gli elementi di software matematico realizzati per la risoluzione di un sistema di equazioni lineari mediante metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale ed algoritmo di back substitution, risolvere un sistema del tipo
   $$Ax = b,$$
   con A matrice di dimensione 50×50 e b vettore di dimensione 50; si suggerisce, a tal fine, di:

   - generare, mediante `matlab`, la matrice A, in maniera random, ed il vettore b, imponendo che la soluzione sia un vettore
     $$x = [1, 1, \ldots, 1].$$
     Ad esempio, dal prompt di `matlab`, sono possibili le istruzioni:
     ```
     %Generazione della matrice A,
     %memorizzata in un array bidimensionale, 50 x 50
     A=rand(50);
     %Salvataggio di A in un file chiamato A
     save -ascii A;
     %Generazione di b
     b=A*ones(1,50)';
     clear A
     %Salvataggio di b in un file chiamato b
     save -ascii b;
     ```
   - Richiamare le variabili A e b in memoria con le istruzioni
     ```
     load A
     load b
     ```
   - Memorizzare, per righe, la matrice A in un vettore "riga" C (eseguendo le istruzioni dal prompt di `matlab` o scrivendo un opportuno file con estensione `.m`):
     ```
     for i=1:50,
        for j=1:50,
            C(50*(i-1)+j)=A(i,j);
        end
     end
     ```
   - Quindi
     ```
     %Salvataggio del vettore ''colonna'' C
     % in un file chiamato C
     ...
     ```

- Utilizzando come dati di input la matrice ed il vettore dei termini noti generati, eseguire il software realizzato in laboratorio, per risolvere il sistema $Ax = b$ e **salvare** l'output, $\tilde{x}$, relativo al test eseguito.
- Scrivere un elemento di software che, noti x e $\tilde{x}$, calcoli l'errore relativo commesso nell'approssimazione di $\tilde{x}$, in norma infinito[2]:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

- Sapendo che la soluzione del sistema assegnato è il vettore $x = [1, 1, \dots, 1]$, calcolare

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

  con $\tilde{x}$ soluzione calcolata del sistema $Ax = b$.
- Porre particolare attenzione all'ordine di grandezza dell'errore e, dunque, al numero di cifre significative corrette, nella soluzione.
- Detto $\tilde{b}$ il vettore dei termini noti calcolato attraverso `matlab` e b il suo valore *in aritmetica a precisione infinita* (*incognito*), calcolare l'indice di condizionamento di A e stimare un limite inferiore all'ordine di grandezza dell'errore relativo introdotto nel calcolo di $\tilde{b}$ ricordando che:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \mu(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty}$$

[2]Si ricorda che

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad se \quad x \in \Re^n$$